Глава 5 Дополнительный материал

— Введение —

Вы из тех, кто хотел бы, чтобы в специально кратких описаниях уроков было больше примеров, обсуждений и комментариев? Если да, то вы попали в нужное место! Этот файл содержит бонусный материал для некоторых заданий из главы 5.

Для головоломок приводится множество примеров решенных головоломок, а также дополнительные комментарии о том, как их создавать. Программа Early Family Math основана на идее, что ранняя математика - это то, чем семья должна заниматься вместе, и создание головоломок для вашего ребенка является важной частью этого процесса. Как только вы освоите каждую головоломку, вы обнаружите, что большинство, если не все головоломки вам довольно легко создать.

Многие из этих головоломок имеют разные уровни сложности, и на следующих страницах есть много предложений и примеров, как их создавать. Всегда начинайте с самых простых головоломок. Гораздо лучше, чтобы ваш ребенок испытал успех, понимание и развлечение, разгадывая слишком простые головоломки, чем разочаровываться, разочаровываться и усложнять себе задачу решать слишком сложные головоломки. Как только ваш ребенок приобретет уверенность и энтузиазм к математической деятельности, пора постепенно переходить к более сложным задачам. Кроме того, не все головоломки будут интересными для всех, поэтому не разгадывайте головоломки и задания, которые, кажется, не связаны между собой.

Это то, что вы найдете на следующих страницах:

- **Глава 5 — Ним с факторами**
- **Глава 5 — Решето Эратосфена**
- **Глава 5 — Рычаги и мобили**
- **Глава 5 — Разделите коробку**
- **Глава 5 — Головоломки с заменой букв**
- **Глава 5 — Исследования — Игра с фигурами**
- **Глава 5 — Игра продукта**
- **Глава 5 — Ограниченные калькуляторы**
- **Глава 5 — Дважды или ничего**

Глава 5 — Ним с факторами

— Введение —

Начните с любого числа, скажем 20. Пусть ребенок решит, идти первым или вторым. Во время своего хода игрок может вычесть из числа любой делитель текущего числа. Игрок вынужден 0 проигрывает.

— Анализ —

Как обычно, хорошей стратегией для изучения этой игры является просмотр более простой версии игры, что в данном случае означает начало с очень маленьких чисел. Если настала ваша очередь, и вы столкнулись с каждым из этих чисел, вот что произойдет: 1 - проиграть, 2 - выиграть, 3 - проиграть, 4 - выиграть, 5 - проиграть, 6 - выиграть, 7 проиграть и 8. победить. К настоящему времени картина ясна - если это ваш ход и у вас нечетное число, вы проиграете; если у вас четное число, то вы выиграете.

Поиск выигрышной стратегии - большой шаг, но давайте углубимся. Почему это работает? Какие свойства нечетных и четных чисел создают такую ситуацию? Задайте этот вопрос своему ребенку и дайте ему много времени, чтобы подумать над ним и поэкспериментировать с ним - не нужно спешить, и этот процесс борьбы с вопросом неоценим, и его нельзя прерывать.

Некоторые эксперименты с небольшими числами быстро показывают, что происходит. Если у вас нечетное число, все делители нечетные, поэтому при вычитании любого делителя результатом будет четное число. Следовательно, нечетные числа на одном ходу всегда приводят к четным числам на следующем ходу. Четные числа всегда имеют как нечетные, так и четные числа в качестве делителей. Итак, ситуация не совсем та. Однако, если у вас четное число, ваша цель - дать оппоненту нечетное число, и есть простой способ сделать это - выбрать делитель 1 и вычесть его!

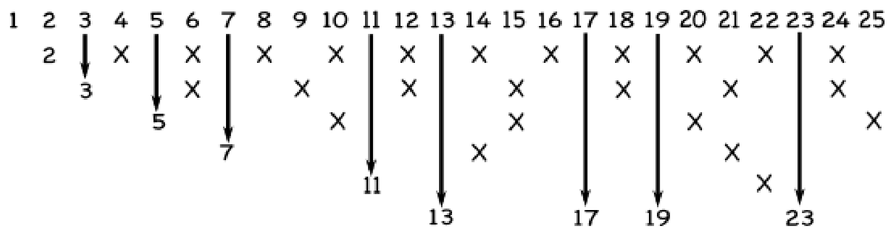
Глава 5 — Сито Эратосфена

— Введение —

Начните с числовой строки, пронумерованной от 1 до 25 - или большего диапазона, если позволяет пространство и ваше терпение.

Напишите цифру 2 под собой. В строке, даже с этой 2, поместите X под каждым кратным 2.

числом,Теперь потяните вниз первое число без X под ним (в данном случае 3) и поместите его на следующую строку. Напишите 3 и поставьте X в этой строке для всех ее кратных. Продолжайте в том же духе. В конце вы удалите все *простые числа*. Помните, что 1 - это *единица,* а не простое число!



— Анализ —

этот простой процесс раскрывает некоторые интересные факты о простых числах. Посмотрите, сможет ли ваш ребенок задать некоторые из этих вопросов - однако, если они не возникают естественным образом, можно задать несколько вопросов.

1) Почему в числах выпадают простые числа?

Предположим, у вас есть составное число. Мы хотим показать, что под этим номером будет крестик. Будучи составным, он делится на некоторое число n между 1 и этим числом. Если n - простое число, то под нашим составным числом будет X, поскольку n является более ранним простым числом. Если n не является простым числом, то под ним стоит X от некоторого более раннего простого числа, назовите его p. Теперь p равномерно делит n, а n равномерно делит наше новое число, поэтому p должно разделить наше новое число. Следовательно, отмечая числа, кратные p, под нашим новым числом был бы помещен крестик.

2) Когда вы помещаете X вместо числа, кратного простому числу, есть некоторые числа, в которых уже есть X из более раннего простого числа. Когда это происходит, а когда нет?

Давайте посмотрим на числа, кратные 5, на сите выше. Кратные 5 x 2, 5 x 3 и 5 x 4 уже зачеркнуты. Только 5 x 5 новый. Это происходит потому, что 5 x 2, 5 x 3 и 5 x 4 кратны 2 и 3, более ранним простым числам. Если мы хотим поставить X на новые места, мы должны умножить 5 на числа, у которых есть только простые множители, равные 5 и выше. Поскольку отслеживать все это немного утомительно, некоторые люди просто вычеркивают нечетные числа и оставляют все как есть.

3) Для этого сита, какое последнее простое число имело полезный новый X в своем ряду?

В этом сите простые числа с полезными X равны 2, 3 и 5. Все числа, кратные 7 и 11, были старыми X. Если вы посмотрите ответ на последний вопрос, вы увидите ответ здесь. Единственный способ получить новые X - это умножить простое число на простые числа, большие или равные самому себе. Как только мы достигаем такого простого числа, как 7, где 7 x 7> 25, нам не нужно его проверять. Итак, нам нужно только проверить простые числа, квадрат которых меньше или равен последнему числу.

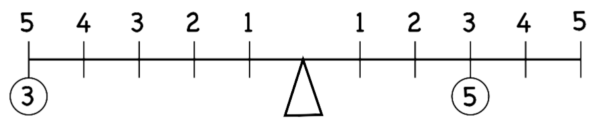
4) Если бы вам дали число, скажем 53, на какие простые числа вам нужно было бы разделить его, чтобы увидеть, что оно простое?

От ответа на последний вопрос нам нужно только проверить простые числа, квадрат которых меньше или равен 53. Эти простые числа равны 2, 3, 5 и 7 - ни одно из них не делит 53 равномерно, поэтому 53 должно быть простым!

Глава 5 — Рычаги и подвижные элементы

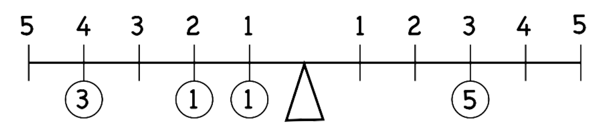
— Рычаги —

Принцип рычага гласит, что сила, действующая на одну сторону рычага со стороны массы, равна массе, умноженной на ее расстояние от точки поворота, точки опоры.



В рычаге выше цифра 3 на левой стороне находится на расстоянии 5 от точки опоры, поэтому ее сила составляет 3 x 5 = 15. 5 на правой стороне находится на расстоянии 3 от точки опоры, поэтому ее сила равна 5. x 3 = 15. Этот рычаг находится в равновесии.

Если на стороне больше одного груза, силы складываются.



В этом рычаге 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15 с левой стороны и 5 x 3 = 15 с правой стороны. Так что это баланс.

Мы ограничим эти задачи только целыми числами. Вы можете решить, разрешаете ли вы подвешивать несколько весов к одной и той же точке - в последующем обсуждении мы предположим, что делать несколько весов - это нормально.

— Головоломки с рычагом — у

вас есть 3-х единиц веса и 5-ти единичный вес, которые нужно разместить на противоположных сторонах точки опоры. Где они должны быть сбалансированы? Ответом на это могут быть расстояния 5 и 3, но также могут быть 10 и 6 или даже более крупные ответы, такие как 15 и 9. Будьте открыты для обсуждения того, что придумает ваш ребенок.

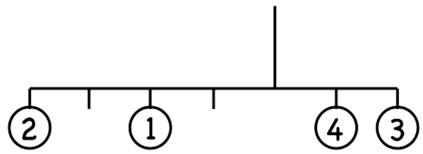
Если у вас есть 3-х и 5-ти весовые гири, которые нужно поставить на одну сторону рычага, какие гири вы можете установить на какое расстояние с другой стороны? Этот вопрос является продолжением вопросов на странице «Сделайте счет» в конце главы 4. Как и раньше, исследуйте различные комбинации весов. Что произойдет, если 3 и 5 заменить на 4 и 5, 4 и 9 или 6 и 9?

Как изменится эта последняя проблема, если мы поместим гири с 3 и 5 единицами по разные стороны от точки опоры? Теперь легко взвесить 1-ю единицу веса, используя 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1. Какие еще веса вы можете взвесить таким образом?

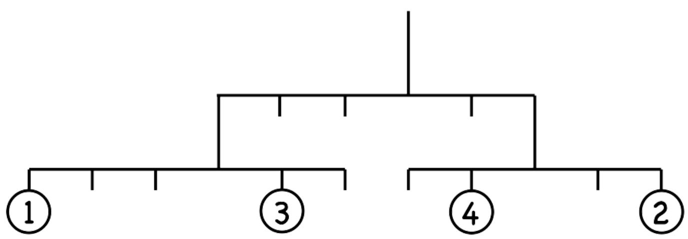
— Мобильные телефоны —

Вам дается определенный вес и дизайн для мобильного телефона с некоторыми точками крепления. Задача состоит в том, чтобы разместить не более одного груза на каждую точку крепления, чтобы мобильный телефон балансировал на каждой руке. Ради решения этих проблем предположим, что провода, которые создают мобильник, невесомы. Каждая рука в мобильном телефоне - это рычаг, который необходимо уравновесить, поэтому эти головоломки являются продолжением рычага баланса - попробуйте эти головоломки, прежде чем приступать к ним.

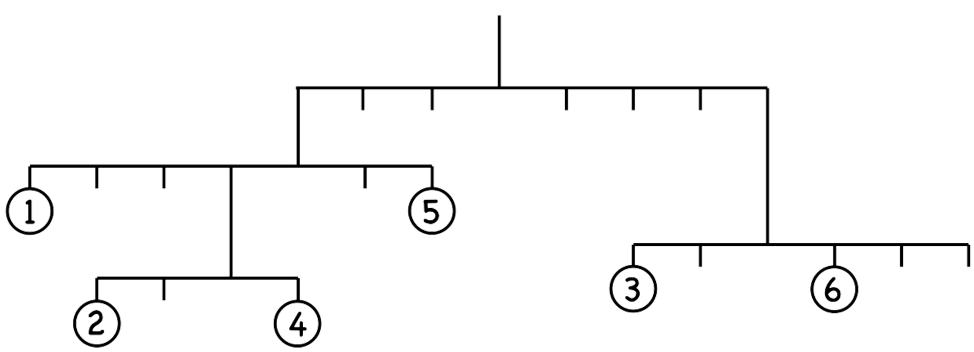
Начните с самых простых мобильных телефонов, которые являются просто рычагами в воздухе. Вот решение, как поставить гири от 1 до 4 на этот мобильный телефон, чтобы сбалансировать его. Это работает как рычаг с точкой опоры в точке подвешивания. Для этого мобиля имеем 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2.



Если у мобиля более одного уровня, то каждая отдельная рука на каждом уровне должна балансировать как рычаг. Для этого следующего мобиля две нижние руки уравновешивают, потому что 1 x 3 = 3 x 1 и 4 x 1 = 2 x 2. Для следующего уровня вы просто складываете веса под ним. Например, вес на левой стороне равен 1 + 3 = 4 - что касается следующего уровня вверх, не имеет значения, где на этом нижнем рычаге расположены грузы. Итак, для следующего уровня (1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12, так что верхний уровень также уравновешивается.



Развлекайтесь, собирая друг для друга мобильные пазлы. Вот последний вариант, с которым можно поиграть, используя каждое из чисел от 1 до 6. Не беспокойтесь о том, чтобы придумать что-то необычное и использовать каждое число один раз. Любая завершенная головоломка доставит удовольствие. Проверяя уровни имеем: 2 x 2 = 4 x 1; 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2; 3 x 2 = 6 x 1; и (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4.



Глава 5 — Разделите

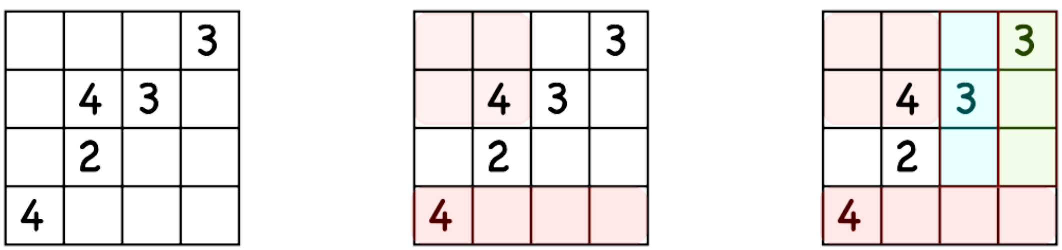
— Введение —

прямоугольник Прямоугольник размером 4 на 4 или больше, с числами в некоторых квадратах, предназначен для быть разделенным на более мелкие прямоугольники. Каждое число должно оказаться в отдельном прямоугольнике, площадь которого соответствует этому числу.

Для взрослых собрать эти пазлы достаточно просто. Возьмите прямоугольник, разделите его внутреннюю часть на прямоугольники, введите числа для областей внутри каждого внутреннего прямоугольника, а затем удалите все знаки внутренних прямоугольников. Единственная сложная часть - это расставлять числа в местах, которые делают головоломку достаточно простой для решения - вы всегда можете дать подсказки по мере необходимости, если ваша головоломка окажется слишком сложной.

— Стратегии решения —

вот несколько общих стратегий, которые могут упростить решение этих головоломок. Сделайте все возможное, чтобы ваш ребенок узнал об этих правилах, играя в головоломки. Составьте список правил, которые они придумывают.



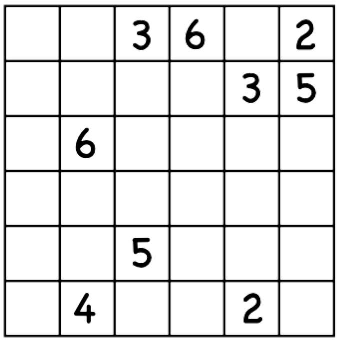
1) Посмотрите на числа с одним или двумя вариантами прямоугольников.

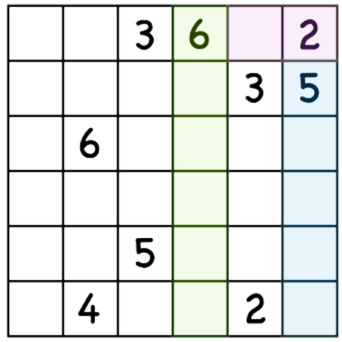
Обе четверки сильно ограничены. Каждые 4 могут быть внутри прямоугольника 1 на 4 или 2 на 2. Верхние 4 загнуты, поэтому они не могут быть внутри 1 на 4. Итак, в верхнем левом углу должен быть прямоугольник 2 на 2. Это оставляет нижние 4 только с возможностью того, что его прямоугольник будет 1 на 4 и будет проходить по нижней стороне.

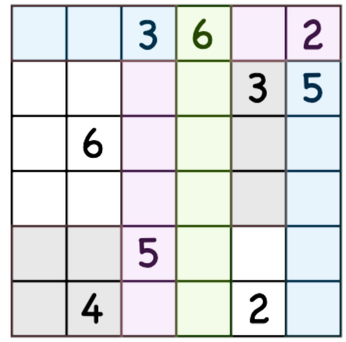
2) Посмотрите на простые числа - они должны быть внутри прямоугольника 1 на n.

Тройки в головоломке выше должны находиться в прямоугольнике размером 1 на 3. Число 3 в правом верхнем углу может быть только частью прямоугольника 1 на 3, идущего вдоль верхнего края или вдоль правой стороны. Верхний левый квадрат 2 на 2, заблокированный для 4, делает невозможным размещение 1 на 3 вдоль верхнего края.

1 на 4 внизу заставляет 1 на 3 для нижней из двух троек быть более высокой из двух вертикальных возможностей.







3) Числа, близкие к максимальному размеру, часто имеют несколько вариантов.

Посмотрите на цифры 6 и 5 в следующей загадке. Самым верхним 6 нужно много места, и единственный способ получить достаточно места - это вертикально вниз, занимая всю колонну. Остальные 6 не могут быть 1 х 6, потому что строка была обрезана столбцом другой 6. Итак, нижняя 6 должна быть 2 х 3, что еще не совсем определено.

В качестве другого примера, если бы в этой головоломке была цифра 8, 1 на 8 не подошла бы, поэтому она должна была бы быть частью прямоугольника 2 на 4.

4) У квадратов, заключенных в рамку, есть несколько вариантов.

Верхние 5 заключены в прямоугольную рамку, поэтому единственный выбор - быть в столбце с 5 ячейками. Остальные 5, поскольку это тоже простое число, должны располагаться вертикально или горизонтально. Он обрезан по горизонтали столбцом для 6, поэтому он должен идти вертикально вверх прямо под 3.

5) Углы часто сильно ограничены.

Число 2 в правом верхнем углу должно располагаться горизонтально, чтобы его было легко заполнить.

Глава 5 — Головоломки с заменой букв

— Введение —

Как только ваш ребенок освоится с головоломками с пропущенными числами из нескольких страниц ранее в этой главе, они могут начинать играя с этими головоломками. В них одна или несколько цифр заменены буквами. Три правила для букв:

- буква - всегда та же цифра.
- одна одна и Самая левая цифра числа никогда не равна 0.
- Различные буквы должны быть разными цифрами.

Создайте эти головоломки, взяв задачу на сложение или вычитание и заменив одну или несколько цифр. Пазлы также могут быть составлены для решения интересных задач вашему ребенку. Обратите внимание, что значения букв не переносятся от головоломки к головоломке.

— Примеры —

Этот первый пример показывает, как вы можете взять стандартную задачу на сложение или вычитание и составить из нее головоломку с заменой букв. Первая версия заменила все 6 на A, а вторая версия заменила 2 на B.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r} 23 \\ +4\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A}9 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{B}3 \\ +4\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{A}9 \end{array}$$

Остальные эти примеры тщательно построены, чтобы разрешить решение с использованием свойств конкретной ситуации. Следует отметить одно свойство: когда вы складываете два числа, перенос в следующий столбец всегда равен либо 0, либо 1. Так, например, в задаче A + A = C4, C должно быть 1, потому что это недопустимо. 0.

$$\begin{array}{r} \mathrm{B} \\ +8 \\ \hline \mathrm{C} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{B} \\ +\mathrm{B} \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ +\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{C}4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ +2 \\ \hline \mathrm{BC} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{D} \\ +2 \\ \hline \mathrm{EE} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ +\mathrm{B} \\ \hline \mathrm{AC} \end{array}$$

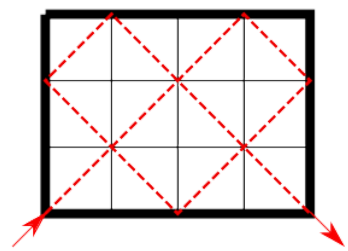
$$\begin{array}{r} \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \\ +\mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B}2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{C} \\ \mathrm{C} \\ +\mathrm{C} \\ \hline \mathrm{D}4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \\ +7 \\ \hline \mathrm{B} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \\ +\mathrm{B} \\ \hline \mathrm{B}0 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{A} \\ +\mathrm{BB} \\ \hline \mathrm{A}7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{B} \\ +\mathrm{AB} \\ \hline \mathrm{BA} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathrm{BA} \\ +\mathrm{BB} \\ \hline \mathrm{CAB} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{AD} \\ +\mathrm{BD} \\ \hline \mathrm{BCC} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{AA} \\ +\mathrm{BA} \\ \hline \mathrm{BBC} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{AA} \\ +\mathrm{CB} \\ \hline \mathrm{BBC} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{AA} \\ +\mathrm{AB} \\ \hline \mathrm{CAC} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathrm{AA} \\ +\mathrm{AA} \\ \hline \mathrm{BBC} \end{array}$$

Глава 5 — Игра с фигурами

— Прыгающий бильярдный шар — Введение —

Представьте себе бильярдный стол, у которого в каждом углу есть лузы. Когда мяч отскакивает от края стола, он отскакивает под тем же углом, под которым попал. Если мы выстрелим мячом под углом 45 градусов из левого нижнего угла, где он окажется? Ответ зависит от размера стола. На рисунке справа показано, что происходит на столе 3 на 4.



Дайте ребенку рисунок стола и предложите ему угадать, в какой угол ударится первым и сколько отскоков потребуется, прежде чем он доберется до этого угла.

— Прыгающий бильярдный шар — Анализ —

Начните с того, что позвольте вашему ребенку просто поиграть с этим и не спешите с результатами. Как вы увидите, эта проблема связана с некоторыми изощренными идеями для молодого человека. При необходимости задайте пару вопросов, чтобы придать их мышлению немного больше структуры. Вы знаете, что нас ждет - сначала посмотрите на более простые таблицы, чтобы найти закономерности - когда эта идея станет для вашего ребенка автоматической, она будет хорошо служить ему на всю оставшуюся жизнь!

Самые простые таблицы - 1 на n, и их легко понять. Играя с несколькими значениями n, картина вырисовывается быстро. Такой простой результат легко недооценить; однако следует приветствовать любой полностью понятый результат, и этот результат приведет к другим.

Результат: таблица 1 на n: мяч совершит n-1 отскоков. Мяч окажется в правом нижнем углу, если n четно, и в правом верхнем углу, если n нечетно.

Следующие простейшие таблицы - 2 по n. Паттерны здесь немного сложнее. Хорошее ведение документации может иметь большое значение в таких случаях. Наблюдательный экспериментатор заметит, что таблица 2 на 4 ведет себя так же, как таблица 1 на 2, а таблица 2 на 6 - как таблица 1 на 3. Это быстро обобщает до следующего результата.

Результат: таблица 2 на 2xn ведет себя так же, как таблица 1 на n.

Почему это? Что здесь происходит? Это математический процесс, который нужно привить вашему ребенку - ищите закономерности, а затем стремитесь понять их, и с этим новым пониманием расширьте свои предыдущие результаты.

Что происходит, так это то, что отскоки стола не изменяются, если вы увеличиваете оба измерения в одном и том же множителе. Когда это будет сделано, стол станет больше, но геометрия останется прежней. С точки зрения геометрии, две таблицы называются «похожими».

Результат: таблица размером kxm на kxn ведет себя точно так же, как таблица m на n.

Мы достигли этого небольшими шагами, но это ОГРОМНЫЙ результат. Это означает, что мы можем начать анализ любой таблицы, сначала удалив любой общий фактор.

Продолжаем с того места, где мы остановились, для 2 на n таблиц. Мы понимаем, что происходит, когда n четно, но что происходит, когда n нечетно? Что происходит для 2 на n при n = 1, 3, 5, 7 и т. Д.? Образец быстро становится заметным.

<u>Результат</u>: когда n нечетно, таблица 2 на n имеет n отскоков и заканчивается в верхнем левом углу.

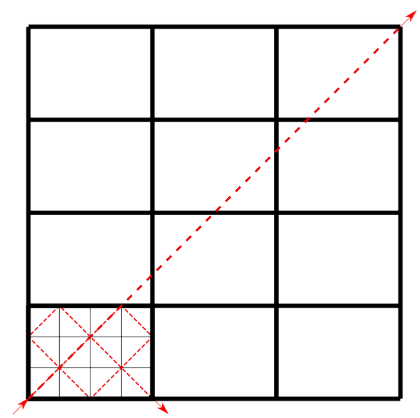
Достигнут большой прогресс. Игра с большим количеством примеров приводит к еще нескольким шаблонам.

<u>Результат</u>: если n не кратно 3, таблица 3 на n имеет n + 1 отскоков и заканчивается в верхнем правом углу, если n имеет остаток 1 при делении на 3, и в правом нижнем углу, если n имеет остаток от 2 при делении на 3. Если n нечетное, таблица 4 на n имеет n + 2 отскоков и заканчивается в верхнем левом углу. Если n не кратно 5, таблица 5 на n имеет n + 3 отскоков и заканчивается в верхнем правом углу, когда n нечетно, и в нижнем правом углу, когда n четно.

На этом этапе у нас возникает соблазн просмотреть данные, увидеть некоторые закономерности и сделать некоторые предположения.

<u>Гипотеза</u>: предположим, что k и n не имеют общих множителей. Тогда ak by n стол будет иметь k + n - 2 отскока. Он будет заканчиваться в верхнем левом углу, если k четно. Он будет заканчиваться в верхнем правом углу, если k нечетное и n нечетное, и в правом нижнем углу, если k нечетное, а n четное.

Ух ты - если эта гипотеза верна, мы полностью решили эту проблему! Вы знаете, что нас ждет… Давайте посмотрим, сможем ли мы объяснить, почему это предположение должно быть верным (или выясним, что оно ложное).



Хотя есть и другие способы разобраться в этой ситуации, как это иногда бывает, эту проблему намного легче понять благодаря новой идее. Возможно, вам это не придет в голову, но как только вы это увидите, вы, вероятно, будете поражены. Идея состоит в том, чтобы развернуть стол так, чтобы мяч мог лететь по прямой! Вот что произойдет, если мы развернем исходный стол 3 на 4 и сделаем путь мяча прямой линией.

Убедиться в том, что гипотеза верна, теперь намного проще. Отскоки соответствуют пересекающимся линиям - их (k - 1) пересекаются в одном направлении и (n - 1) из них пересекаются в другом направлении, так что вместе получается (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 пересечения линий. Увидеть, в каком углу он окажется, нужно следить за тем, как все разворачивается. Мы все закончили довольно интересное путешествие.

— Заполнение областей фигурами — Введение —

Предположим, у вас есть шахматная доска 8 на 8 и у вас есть коллекция плиток 1 на 2. Найти способ точно покрыть шахматную доску 32 такими плитками размером 1 на 2 достаточно просто.

Давайте начнем убирать с доски несколько квадратов и посмотрим, что получится. Если вы удалите один угол шахматной доски, вы сразу поймете, что вы больше не можете покрывать шахматную доску плитками, потому что плитки всегда будут покрывать четное количество квадратов, и теперь есть 63 квадрата, которые нужно покрыть. Хорошо, удалите два угла, чтобы получить четное количество оставшихся квадратов. Можете ли вы закрыть это сейчас? Ответ зависит от того, какие два угла вы удалите. Почему? Что, если вы больше не будете ограничиваться удалением углов, что тогда будет?

— Заполнение областей формами — Анализ —

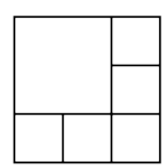
позвольте вашему ребенку поиграть с этим, прежде чем раскрывать идею раскраски. Если они поиграют с небольшими досками, они могут обнаружить правило самостоятельно, и это всегда лучше.

Наблюдение, которое очень помогает в этом вопросе, - это использование раскраски квадратов шахматной доски. Если вы возьмете плитки 1 на 2 и покрасите один квадрат в белый, а другой в черный, вы увидите, что происходит интересная вещь. Каждая плитка должна покрывать квадрат каждого цвета. Мало того, что k плиток покроют 2xk квадратов, они будут покрывать k белых квадратов и k черных квадратов - одинаковое количество квадратов каждого цвета. Используя эту идею, становится очевидным, что если вы удалите больше квадратов одного цвета, чем другого, то закрыть доску будет невозможно.

Если вашему ребенку нравятся эти вопросы, начните использовать другие формы для заполнения доски. Поиграйте с заполнением его плитками размером 1 на 3 или 3 квадратами в форме буквы L. Какие закономерности и правила вы обнаружите с их помощью? С какими еще фигурами может быть интересно поиграть?

— Заполнение квадратов квадратами — Введение —

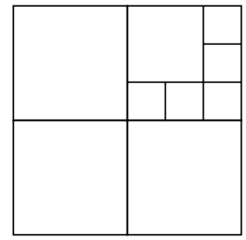
Какими способами вы можете заполнить квадрат другими квадратами, когда другие квадраты не обязательно должны быть одинакового размера? Однако длины не могут быть полностью случайными числами - длина стороны каждого квадрата должна быть целым числом, кратным фиксированной длине. Вопрос для исследования: каково все возможное количество квадратов? Кроме того, если вы знаете, что число возможно, есть ли простой способ описать, как это сделать?



Пусть ваш ребенок играет с ним много дней и не торопитесь с ответом. Есть много разных способов придумать идеи для этого расследования, поэтому будьте гибкими и работайте с идеями вашего ребенка. Вот диаграмма, показывающая, как возможно 6.

Придумывать несколько быстрых примеров - всегда хорошая идея. Разбейте большой квадрат на квадраты равного размера как легкое начало. Из этого вы знаете, что квадратные числа (1, 4, 9, 16, 25,…) работают.

Работая с примером с шестью квадратами, мы можем использовать один большой квадрат любого размера и положить квадраты 1 на 1 на двух его сторонах. Проделав это для все больших квадратов (1 на 1, 2 на 2, 3 на 3,…), мы получим 1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6 (как на картинке), 1 + 7 = 8, 1 + 9 = 10. , и так далее. Таким образом, можно сделать все четные числа, начинающиеся с 4.



Мощная идея, которая быстро завершает это, состоит в том, чтобы увидеть, что мы можем взять диаграмму, которая работает, и заменить один из ее квадратов другой диаграммой, которая работает. Так, например, если вы возьмете простой 2 на 2, заполненный квадратами 4 1 на 1, и замените один из этих квадратов 1 на 1 примером с 6 квадратами, вы получите диаграмму, показанную справа, с 9 квадратами.

Поскольку один квадрат заменяется диаграммой из n квадратов, чистое изменение количества квадратов состоит в добавлении n-1 из них. Это означает, что мы можем взять одно работающее число и прибавить к любому другому действующему числу кратное на единицу меньше этого числа. В частности, мы можем добавить кратные 4-1 = 3 к любому другому числу, которое работает. Легче всего добавить 3 к четным числам, начинающимся с 4. Если

сложить все вместе, то можно сказать, что числа 1, 4, 6, 7, 8, 9,… все работают, и легко увидеть хотя бы один простой способ их сконструировать. Также легко убедить себя, что числа 2, 3 и 5 невозможны.

Если вашему ребенку нравится изучать этот вопрос, изучите варианты на эту тему. Предположим, вы разрешаете только квадраты определенных размеров - например, 1 на 1, 2 на 2 и 3 на 3. Или, возможно, разрешаете только 2 на 2 и 3 на 3. Посмотрите, какие вопросы приводят к интересным результатам, а какие не так интересны. .

Еще одно направление - заполнение других фигур фигурами той же формы. Например, задайте тот же вопрос для правильных треугольников (треугольников со всеми сторонами одинаковой длины). Некоторые цифры интересно исследовать таким образом, а некоторые совсем неинтересны - какие?

Глава 5 — Игра продукта

— Введение —

Используйте общий лист бумаги, заполненный следующим образом:

Первый игрок перемещает жетон на любое число от 1 до 9 в квадратах 1–9 в нижнем ряду. Второй игрок кладет еще один жетон на один из квадратов 1–9 в нижнем ряду и забирает продукт в сетке 6 на 6. С этого момента каждый игрок решает переместить один из двух жетонов и забрать товар (если они могут). Выигрывает тот игрок, который первым заберет 3 клетки подряд. Смешайте номера продуктов в сетке 6 на 6, чтобы ваш ребенок лучше научился определять продукты.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Эти игровые доски могут быть сделаны сколь угодно большими, хотя довольно быстро они становятся довольно большими. Вот несколько больших плат с соответствующими диапазонами большего числа под ними.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадраты с красными звездами являются «свободными» квадратами и могут использоваться любой стороной по мере необходимости.

Глава 5 — Калькуляторы с ограниченным набором функций

— Введение —

Предположим, у вас есть сильно сломанный калькулятор, и вам нужно получить какой-то результат на калькуляторе. Вы можете придумать самые разные сценарии, которые могут предложить интересные задачи с кратким описанием головоломки. В эту игру легко играть устно, когда у вас есть свободная минута. Вот несколько примеров, с которых можно начать.

Хотя бывают моменты, когда в этих вопросах используется более глубокая математика, в основном это задачи, предназначенные исключительно для забавы поиграть с ними.

1a) Предположим, у вас есть калькулятор с +, -, x и /, но только одна рабочая цифровая клавиша 4. Можете ли вы получить результат 21? Если да, какое наименьшее количество шагов вам потребуется?

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21 - это один способ, но есть много других способов сделать это. Другой - 4 x (4 + 4/4) + 4/4. Цель состоит в том, чтобы поиграть и получить удовольствие от исследования.

1b) Предположим, вы могли бы использовать 4 раза максимум четыре раза - какие числа вы могли бы получить? Предположим, вам пришлось использовать 4 ровно четыре раза.

По мере увеличения математических ресурсов ребенка задача четырех четверок превращается в забавную головоломку. На данный момент выбор вашего ребенка весьма ограничен, но играть с ним по-прежнему очень весело. Будет особенно сложно выполнить многие числа без деления или использования десятичных знаков. Не беспокойтесь о том, чтобы придумывать все числа по порядку - просто придумывайте как можно больше разных чисел.

Вот несколько примеров для начала.

1 = (4/4) x (4/4) = 44/44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4-4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44/4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4-4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) Поиграйте с другими одиночными числами и получите другие результаты.

2a) Предположим, ваш калькулятор может складывать только 4 или 7. Какие числа вы можете произвести?

Это результат, который мы уже видели несколько раз. Начиная с (4-1) x (7-1), вы можете получить все числа, сложив числа, кратные 4 и 7. 18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7 и т. Д.

2б) Предположим, у него есть 4 или 7, но он может складывать и вычитать. Какие числа вы могли бы произвести?

Таким образом можно получить все числа.

2c) Замените 4 и 7 другими парами чисел. Что происходит с этими парами?

В теории чисел это называется теоремой Безу. Результат говорит о том, что, комбинируя кратные двух чисел, вы можете получить любое кратное наибольшему общему делителю этих двух чисел.

3) Предположим, у вас есть только 1 ключ, и вы можете только добавлять или удваивать. Например, 2 x (2 x 1) + 1 равно 5. Какие еще числа вы можете создать?

Это вопрос о замаскированных двоичных числах. Вашему ребенку не важно это осознавать или понимать, это просто для игры. Любое число можно записать в двоичном формате, поэтому все числа могут быть получены путем объединения удвоения с добавлением 1. Например, 21 равно 16 + 4 + 1. Итак, 21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

Глава 5 — Дважды или ничего

— Введение —

Игроки начинают игру, тайно выбирая 5 различных чисел больше 20 и не больше 120. После того, как они выбраны, они записываются там, где все могут увидеть их. С помощью цифровых карточек или другого устройства создается случайное число от 1 до 20. Это число многократно удваивается до тех пор, пока чье-либо число не выпадет в первый раз или число не станет больше 120. Первый игрок, у которого выпадут все пять чисел, становится победителем.

— Анализ —

. Возникает вопрос: какие пять чисел лучше выбрать? Вот несколько идей, над которыми стоит подумать.

<u>Правило</u>: всегда выбирайте число, которое является степенью двойного числа от 1 до 20.

Если вы выберете такое число, как 23 или 46, они никогда не могут быть выбиты, и вы гарантированно проиграете.

<u>Правило</u>: никогда не выбирайте число, которое вдвое больше числа, которое вы могли бы выбрать, но не сделали.

Если вы выбрали 44, почему бы вместо этого не выбрать 22? Если другой человек выберет 22, вы пропустите раунд.

<u>Дальнейший анализ</u>: с одинаковой вероятностью будут выбраны числа от 1 до 20. Однако, поскольку 9 ведет к 18, вероятность 18 в два раза выше, чем, скажем, 11. Если вы комбинируете способы получить разные старты, стартовые точки будут иметь следующие вероятности:

11 - 1/20 (из 11)

12 - 3/20 (из 3, 6 и 12)

13 - 1/20 (из 13).

14 - 2/20 (из 7 и 14)

15 - 1/20 (из 15)

16 - 5/20 (из 1, 2, 4, 8 и 16)

17 - 1/20 (из 17)

18 - 2 / 20 (из 9 и 18)

19 - 1/20 (из 19)

20 - 3/20 (из 5, 10 и 20)

Очевидно, что лучше всего использовать числа, кратные 16, 12 и 20. Простая стратегия состоит в том, чтобы использовать пять чисел: 32, 64, 24, 48 и 40. Эти числа не всегда будут выигрывать, но со временем они должны вам помочь.