

第五阶段 – 我能数到100!

前提：能够轻松地数到100，并且对数值有很好的感知，尤其是懂得使用位值。同时能够扎实地掌握心算个位数字的加减法。

回顾所学内容.....

您的孩子现在可以数到100了！他们可以轻松地一位数字加减法的心算，还可以从任意数字开始计数或跳数，该技能发展与延伸使他们能够进行一位数与两位数的加减。他们可以比较两个两位数的大小，也初步认识了十位和个位数的位值。

随着孩子跳数能力的提高，他们也在开始发展2、3、4、5和10乘数的技能。奇数和偶数的概念现在对他们来说更加清晰、有意义了。

可以将之前章节的活动延伸到这些更大的数字上：第三章：形状求和，数字再往上增加；第四章：战争-两位数的加减法，差异三角与总和三角，更改错误，从数字1和10开始的跳岛，填空比较，求和正方形，以及加法金字塔。

本章的新概念.....

- **数到200** – 看看 100 到 200 的数字，来认识一下百位。
- **跳数到 100** – 这并不是新知识，但这是一个需要加强的重要技能。
- **展开式和位值** – 这是一项基础技能，因此需要进一步加强。
- **两位数加减法** – 跳数可以帮助我们轻松进行两位数的加减。
- **一位数乘法** – 是时候学习 6、7、8 和 9 乘法了。
- **矩形面积 = 长 × 宽** – 这个本身就是一个重要的数学概念。这个知识点还能很多有趣的游戏和涉及乘法与因式分解的谜题提供诀窍。
- **因式分解** – 你的孩子将学习数字如何分解成因数的奇妙之处。1 是一个单位。大于 1 且仅能被 1 和自身整除的自然数是质数；大于 1 且不是质数的数是合数。3 的平方是 3×3 。3 的立方是 $3 \times 3 \times 3$ 。3 的幂是指将 3 乘以自身很多次——例如，3 的四次方是 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ 。
- **因数、约数和倍数** – 3 可以整除 12。这使得 3 成为 12 的因数或约数，而 12 是 3 的倍数。3 是 12 和 15 的公因数，而 12 是 4 和 6 的公倍数。
- **一位数除法** – 你的孩子将通过在乘法问题中找出缺失的因数来间接学习除法。
- **乘法和除法的运算族** – 我们将在该阶段加强这两种运算之间的联系。例如， $2 \times 5 = 10$ 、 $5 \times 2 = 10$ 、 $10 \div 2 = 5$ 和 $10 \div 5 = 2$ 构成了一个乘除法运算族（一组相关的数学算式，使用相同的数字，但运算不同）。

法律条款

每个家庭都应该有机会共同学习数学并以此为乐。Early Family Math为家庭和教育工作者提供这些学习材料，供其编辑、翻译、复制和分发，无需征求许可，仅限于非商业用途。插图注释：Chris Wright。

© 初期家庭数学版权所有 2024 v.2.0 知识共享：Attribution-NonCommercial 4.0国际许可

心算乘法

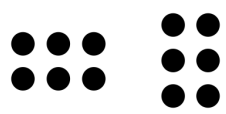
前提：熟练地进行一位数加减法、跳数和倍数运算

引入

这些教学方法提供了学习一位数乘法结构化策略。你的孩子应该已经擅长将任何数字加倍、按任何数字跳数以及乘以 5 和 10。

$3 \times 4 = 4 \times 3$

您的孩子已经非常熟悉加法，因此 $2 + 3$ 等于 $3 + 2$ 这一点并不难理解。虽然不太明显，但乘法也是一样的道理。



这个例子表明，两排三个圆点和三排两个圆点是相同的——只是改变了观察角度！你以什么顺序乘以这两个数字并不重要，你得到的答案是相同的。

这个很酷的观察意味着你的孩子只需要掌握大约一半的乘法运算——一旦你的孩子知道了 3×4 ，他们也就知道了 4×3 。

平方数

就像双胞胎加法是最受欢迎的数学运算方法一样，平方通常也是乘法中最受欢迎的。学习平方运算能够为学习其他乘法打下基础。

多 1 或少 1

当与其他早期学过的技能相结合时，“多 1”或“少 1”（个数字）的策略对于做其他乘法运算是有帮助的。

例如， 9×7 比 10×7 少 1 个 7。因此， $9 \times 7 = 70 - 7 = 63$ 。这适用于所有 9 的倍数。

类似地， 3×7 比 7 的两倍多 1 个 7，因此 $3 \times 7 = 7 + 14 = 21$ 。这适用于所有 3 的倍数。

乘以 9

虽然乘以 9 已经涵盖在上一策略中，但单拎出来讲也很有意思。如果你按顺序写出 9 的倍数，你会发现十位数始终比你相乘的数字小 1，而个位数加上十位数始终等于 9！

位值和加法游戏

前提：了解两位数的位值以及它与加法和比较的关系

组成100..... 游戏

准备工作 每位玩家有一张纸，上面有 7 行 3 列。列标题分别为“十位数”、“个位数”和“累计总和”。

游戏规则 每位玩家的累计总和从 0 开始。掷一个骰子或从 1 到 9 随机抽取一张扑克牌。每位玩家可以选择将这个数放在当前行的个位数或十位数列中。例如，如果抽到 4，可以将其当成是 4 或 40。所选数字将添加到累计总和中。

获胜条件 累计总和超过目标值 100 的玩家“爆牌”并输掉游戏。如果双方都没有爆牌，则累计总和更接近 100 的玩家获胜。

变体

此游戏有多种变体：

- 使用不同的目标数字。
- 使用更少或更多行。
- 超过目标值时不爆牌；两边累计总和更接近的玩家获胜。
- 使用第四列“百位数”来练习三位数。
- 从目标数字开始，减到 0 来练习减法。

占领地盘..... 游戏

准备工作 一张标有数字 0 到 99 的数字线（大家一起分享）

游戏规则 每位玩家轮流进行。在你的回合，从卡片 0-9 中随机抽取两张，可以选择它们的顺序，组成一个两位数 (0-99)。将你生成的两位数标注在数字线上的相应位置。

获胜条件 第一个在规定区域内标注四个数字，且这些数字区间内没有对手数字的玩家获胜。

变体

此游戏还可以从数字 000 到 999 进行。

位值、加法和减法

前提：理解两位数的组成及其与加法和比较的关系

相连群组.....



智力游戏

这种数学谜题有两个版本。

13	7	9	9	6
6	4	4	7	
2	5	11	2	
6	1	7	5	

版本一： 版本一：类似于第三章的“求和群组”，但目标和更大。棋盘可以是任意大小的，这里我们使用一个 4x4 的棋盘。目标数字写在左边，本例中是 13。

挑战： 类似于第三章的“求和群组”，但目标和更大。棋盘可以是任意大小的，这里我们使用一个 4x4 的棋盘。目标数字写在左边，本例中是 13。

版本二： 这是一个 4x4 的棋盘，目标数字是 20。和“求和群组”一样，棋盘上填满了能组成目标数字的数字对或三个数字。然而，现在有一个格子不参与任何组合。

挑战： 找到这个没有参与任何组合的数字。本例中，它是“5”。

20	7	9	7	4
8	4	4	16	
12	5	9	6	
13	7	7	7	

缺失的数字.....



智力游戏

制作步骤 选取简单的加法或减法算式，并省略其中的一些数字。如果你不小心省略了太多数字，可以引导孩子讨论所有可能的解。例如，如果我们开始算式是 $2 + 5 = 7$ ，并且省略了第一个和第三个数字，那么 $? + 5 = ?$ 就有多个解。

举个例子： 以下两个算式通过省略一些数字，变成了“缺失数字”谜题。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ -46 \\ \hline 27 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} _3 \quad 7_ \\ +46 \quad -_6 \\ \hline 6_ \quad 27 \end{array}$$

字母代换谜题： 这些谜题为使用简单变量提供了一个易于理解的垫脚石。当孩子熟练掌握这些谜题后，他们就可以尝试解答本章稍后要介绍的“字母代换”谜题了。

乘法卡和乘法表

前提：熟练掌握所有一位数的乘法运算

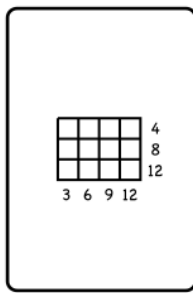
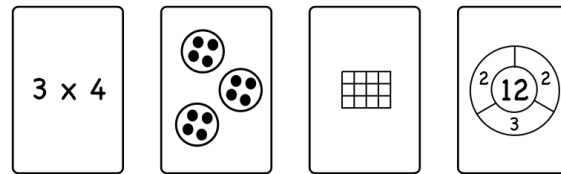
制作乘法卡.....



活动

利用制作乘法卡的方式，和孩子一起玩早先学过的配对游戏 (配对钓鱼、记忆挑战赛；宾果游戏；烫手山芋；金拉米) 的同时练习乘法运算。

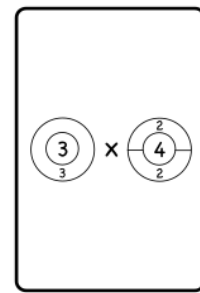
制作步骤：为每个乘法算式制作四张卡片：1. 算式；2. 物体分组；3. 阵列图；4. 质因数分解。表示算式 3×4 的四张卡片如下：



选项：可以只包含 3×4 ，而不包含 4×3 。需要注意的是，看到 4 组 3 个物体和看到 3 组 4 个物体是不同的概念。

阵列图卡可以沿着一侧或两侧标注跳数序列，帮助孩子练习跳数。

算式卡可以将每个数字替换成其质因数分解的符号。这样可以让孩子更容易理解乘法运算中质因数分解是如何结合起来的。



揭示乘积.....



智力游戏

X	5	3	7	8
2	10	6	14	16
9	45	27	63	72
8	40	24	56	64
5	25	15	35	40

制作步骤：准备一个空白表格，有 4 行 4 列，用来填写乘积。表格上方和左侧还有四个缺失数字的组 (可能重复)，这些数字包含 2 到 9 之间的部分数字。在孩子看不到的情况下填满表格，然后翻转或遮盖数字。

挑战：孩子一次可以最多揭开 16 个乘积中的 10 个。目标是在用完所有次数之前找到顶部和左侧的数字。

举个例子：假设所有卡片都翻转了，如果孩子选择翻开下面写着 63 的卡片，他们就会知道它是 7 和 9 的乘积。翻开同一行或同一列的任何其他卡片都会显示 7 和 9 在哪里。假设他们翻开的第二张卡片是 56，那么第三列一定是 7，第二行也是 9，第三行是 8。

因数和倍数

前提：熟练掌握所有一位数的乘法运算

隐藏因数和倍数



准备工作： 备好一个标有 1 到 24 的数字棋盘和两种棋子：一个用于“最后一步”的特殊棋子，另一堆是普通棋子。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24

游戏规则： 第一位玩家可以选择任意一个数字，并用“最后一步”棋子将其盖住。之后，该玩家用普通棋子替换“最后一步”棋子，并将“最后一步”棋子移动到任何一个由上一步数字的因数或倍数构成的数字上。

获胜条件： 被迫盖住数字 1 的玩家即为输家。

举个例子： 下图展示了游戏进行到一半的场景，游戏从 10 开始 -> 5 -> 15 -> 3。

变体

随着孩子对这个游戏逐渐熟练，他们会发现一些合理的首步规则。最基本的规则是，首步不能落在前半部分的质数上。
根据玩家的技能水平调整数字范围，范围可以是 1 到 30、1 到 48 或 1 到 60。

因数尼姆游戏



准备工作： 选择任意一个起始数字，例如 20。让孩子决定是先手还是后手。

游戏规则： 在玩家的回合中，他们可以从当前数字中减去任何一个它的除数。例如，从 20 开始，玩家的第一步可以选择减去 1、2、4、5 或 10。

获胜条件： 被迫将数字减到 0 的玩家即为输，其他人则为赢家。

策略：

当孩子熟悉游戏规则后，鼓励他们寻找获胜的简单策略。一旦他们发现这个策略，请让他们解释其背后的原理。

寻找质数

前提：熟练掌握所有一位数的乘法运算

埃筛法（埃拉托斯特尼筛法） 🔍



孩子们会喜欢在这个筛子里划叉叉，并观察质数是如何漏下来的。这项探索活动可以让孩子们发现许多有趣的可整除性和质数的性质。

准备一条从 1 到 25 (或者更大的数字, 具体取决于空间和耐心) 的数轴。

在 2 的下面写上数字 2。在这行下面，每一个 2 的倍数都标上叉叉。

[illegible]

接下来，找出没有下面标叉叉的最小数字 (在本例中是 3)，把它写在下一行。写上数字 3，并在这一行的所有 3 的倍数下面标上叉叉。

[illegible]

继续找出没有标叉叉的数字，并标记它们的倍数。

完成后，你将筛出所有的质数。记住，1 是单位数，不是质数！

Diagram illustrating the construction of the sequence $\{x_n\}$ from the sequence $\{y_n\}$. The diagram shows two rows of numbers, 1 through 25, representing indices. Arrows indicate mappings between elements:

- $y_1 \rightarrow x_3$
- $y_5 \rightarrow x_5$
- $y_7 \rightarrow x_7$
- $y_{11} \rightarrow x_{11}$
- $y_{13} \rightarrow x_{13}$
- $y_{17} \rightarrow x_{17}$
- $y_{19} \rightarrow x_{19}$
- $y_{23} \rightarrow x_{23}$

The remaining elements in the top row ($y_2, y_3, y_4, y_6, y_8, y_9, y_{10}, y_{12}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{18}, y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{24}, y_{25}$) are mapped to corresponding positions in the bottom row where no arrow is present, indicating they are part of the original sequence $\{y_n\}$.

问题

和孩子一起玩筛选游戏的时候，可以讨论以下问题：

- 为什么筛出来的数字是质数？
- 你需要划掉哪些质数的倍数？为什么其他质数没有用处？
- 对于所有有用的质数，哪些质数的倍数产生了新的限制，哪些没有用？答案中是否存在某种模式？
- 如果你有一个数字，比如 53，你需要用哪些质数除以它来确认它是否是一个质数？

混合运算

前提：熟练掌握两位数的加减法和一位数的乘法

混合运算



准备工作： 用编号从 1 到 25 的卡片，或者孩子熟悉的范围内的一组卡片。

游戏规则： 随机抽取一张卡片作为所有人的目标数字，然后将该卡片放回牌堆。每位玩家发 5 张牌，可以按照任何顺序和运算方式使用这些牌，尽可能接近目标数字。

示例： 假设目标数字是 14，你拿到的是 3、6、12、17 和 20。17 - 3 或 20 - 6 可以达到目标，但只用了两张牌。20 - 12 + 6 使用了三张牌。17 x (6 / 3) - 20 或 20 - (12 / (6 / 3)) 使用了四张牌，如果你想用完所有的牌，这是一个更好的选择。你能找到一种方法用完所有五张牌吗？

计分选择：

对于这个游戏，有多种计分方式可供选择。

- 对于达到目标的玩家，可以记一分。多轮累积得分。
- 玩家每轮的得分是他们的结果和目标数字之间的差值。几轮累积得分，得分最低的玩家获胜。
- 玩家根据使用的牌数得分，使用两张牌达到目标得分两分；使用帮助达到了目标得分 5 分；帮助别人达到目标得分 6 分。

括号谜题



智力游戏

挑战： 取一个表达式，例如 $2+7\times 5-2\times 2$ ，并添加括号使其得到目标结果，例如 9。

制作步骤： 这些题目很容易编写，并且可以根据孩子的技能水平进行调整。取任何一个等式，例如 $9=(2+7)\times (5-2\times 2)$ ，然后去掉括号。就这么简单！使用孩子熟悉的运算和数字。使用较短的表达式和较少的括号可以制作更简单的题目。

混合运算

前提：熟练掌握两位数的加减法和一位数的乘法

秘密运算.....



活动

在第四章结尾处“和与差”活动中，一个人想两个数字，然后说出这两个数字的和与差，让其他人找出这两个数字。“秘密运算”使用了同样的想法，只是现在挑战者可以使用任何两种运算，例如乘法和减法。

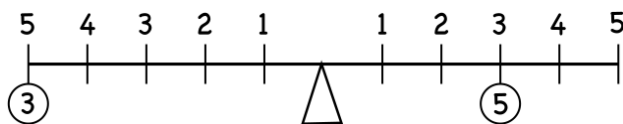
举个例子：挑战者可能会说：“哪些两个数的乘积是 12，差是 4？”也可以扩展到三个数，例如：“哪些三个数的乘积是 12，和是 8？”

杠杆平衡.....



调查

杠杆：利用杠杆原理来练习乘法和加法运算。杠杆原理告诉我们，杠杆一侧的质量乘以其距离支点的距离（称为支点距）等于该侧的力。来自多个质量的力相加得到总力。为了使杠杆平衡，两侧的总力必须相等。



举个例子：你有两个砝码，一个重 3 个单位，另一个重 5 个单位，你想把它们放在支点的两侧使杠杆平衡。应该把它们放在哪里？答案可以是距离支点分别为 5 个单位和 3 个单位，也可以是 10 个单位和 6 个单位，甚至更大，例如 15 个单位和 9 个单位。

如果你要把一个重 3 个单位的砝码和一个重 5 个单位的砝码放在杠杆的一侧，那么另一侧可以放哪些砝码，放在什么位置才能使杠杆平衡？如果这两个砝码分别放在杠杆的两侧会怎样？这个问题延续了第四章末尾“计数”页面中的问题。

乘法和倍数

前提：熟练掌握所有一位数的乘法运算

哔声游戏



准备工作： 让玩家们围坐成一个圈。首先确定一组数字，用于本轮游戏。选择任何一群有趣的数字，或者可以练习某个概念的数字。一些常见选项包括：

- 奇数或偶数
- 3 的倍数 (或其他某个数字的倍数)
- 3 的倍数和 7 的倍数
- 既不是 5 的倍数又是 3 的倍数
- 3 的倍数以及数字本身含有数字 3
- 质数

游戏规则： 玩家们按顺时针顺序轮流说出数字，从 1 开始。当玩家说出属于选定组的数字时，他们必须说“哔”代替那个数字。如果玩家忘记说“哔”或者为错误的数字说了“哔”，则出局。

获胜条件： 最后剩下的玩家获胜！

三连胜



准备工作： 使用一副包含 Q (代表 0)、A (代表 1) 和 2-9 的扑克牌，或者使用四套从 0 到 9 的数字卡片。在一张纸上画出一个 4 行 5 列的表格，其中 20 个空格随机填入 5 和 10 的倍数。为每个玩家准备一套棋子。

游戏规则： 随机抽取一张牌，并将你的棋子放在该数字乘以 5 或 10 的位置，你自己选择乘以 5 还是 10。一旦该位置被占据，另一名玩家就不能将棋子放在那里。

获胜条件： 第一个率先连成三枚棋子的玩家获胜。

变体

可以将数字 5 和 10 换成其他成对的数，例如 2 和 4 或者 3 和 6。成对的数字可以帮助练习乘法的翻倍策略。例如，如果玩家不知道 6×7 等于多少，他们可以计算 3×7 的两倍。

乘法和乘法表

前提：熟练掌握所有一位数的乘法运算

乘法大战.....



准备工作：取一副扑克牌，去除所有花牌后将剩下的数字牌平均分给两个玩家。为了更加专注地练习乘法，也可以去除 A 和 10。

游戏规则：每位玩家翻开两张牌，计算它们的乘积。乘积较大的玩家赢得那四张牌。如果两个玩家的乘积相同，则双方再翻开两张牌，乘积较大的玩家赢得所有八张牌。

获胜条件：在规定时间内，拥有最多牌的玩家获胜。

颠倒乘法表.....



直接填写标准乘法表可能会让孩子感到枯燥，他们很快就会发现可以使用重复加法而不是乘法来完成填空。为了真正练习乘法，以及练习解决问题和因式分解，可以创建一个混乱的乘法表。

创建方法：制作这些表格的方法是将行和列上下移动，然后去掉中间的大部分标题和数字。

X	5				6			
2								
		40						
				49				
	20					36		
		72						
			9					12
					48			

举个例子：以下是一个使用 2 到 9 的标题的例子：

解决方法：从独特的数字开始推理。

20 意味着它所在的行是由 4 乘出来的，而 36 所在的列是由 9 乘出来的。

49 意味着它所在的列和行是由 7 乘出来的。9 意味着它所在的列和行是由 3 乘出来的

继续以这种方式推理，随着标题的确定，逐步填空表格。

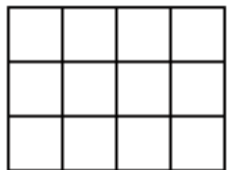
难度等级：通过省略更多或更少的数字来增加或降低难度。在这个例子中，5 列中的“5”可以省略 - 20 中必须包含 5 的因数，而这个因数不可能来自 20 所在的行，因为该行中有 36。

让孩子自己制作：让你的孩子挑战：为你制作这样一个谜题吧！制作谜题需要动很多脑筋呢！

矩形面积

前提:熟练掌握一位数乘法和两位数加法

引言



矩形的面积等于它的长乘宽。这个枯燥的陈述可以通过至少两种方式让孩子更容易理解。

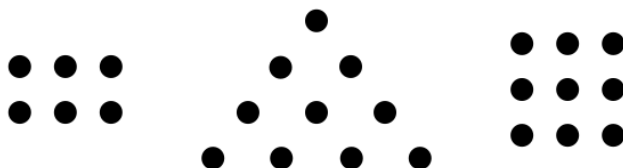
第一种方法是将矩形分解成由许多正方形组成的网格。第二种方法是使用数字图形来观察如何将某个数量 (例如 12) 放置在一个阵列中 - 例如 3×4 、 2×6 或 1×12 。以矩形面积做游戏能帮助我们练习乘法和因式分解!

重温数字形状

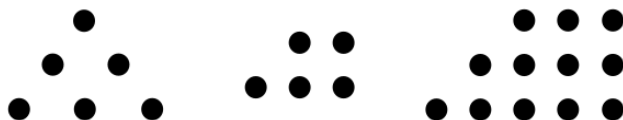


从大量小物体 (例如葡萄干) 开始。对于每个数字, 探索可以用这些物体制作什么样的矩形或者其他形状。

矩形: 矩形的边长是可以整除该数字并且互相乘积等于该数字的值。制作矩形是直接体验可整除性的方法。



单位数、质数、合数: 1 是单位数, 只能用 1×1 的正方形表示。5 这样的只有扁平矩形的数字称为质数。不是单位数或质数的数字称为合数, 因为它们是由质数相乘而成, 例如 $12 = 2 \times 2 \times 3$ 。9 这样的数字称为平方数, 因为它们的一个矩形是正方形 - 面积为9 的一个矩形是 3×3 的正方形。



梯形数: 还有其他有趣的形状可以探索。例如, 哪些数字是梯形数? 这些数字可以表示成楼梯状 (每一层长度变化 1) 吗? 如果将三角形数包含在此组中, 答案会令人惊讶 - 它是不等于 2 的幂的所有数!

矩形面积游戏

前提：熟练掌握一位数乘法和两位数加法

围场游戏



准备工作： 每位玩家都需要一张方格纸。

游戏规则： 玩家轮流使用两张 1 到 10 区间内的数字卡片来确定矩形的长和宽。如果玩家的纸张空间足够，可以将矩形放置在任何内部不与现有矩形重叠的位置。放置完成后，将内部轻轻涂阴影并写上其面积和尺寸。如果没有位置放置矩形，则该玩家跳过此轮。

获胜条件： 总面积最大的玩家获胜。

变体

对于普通方格纸来说，这可能是一个很耗时的游戏 - 可以通过使用一半的纸张或限制回合数来缩短游戏时间。

分割盒子



挑战： 将一个 4 x 4 或更大的矩形（其某些正方形内包含数字）分成更小的矩形。每个数字必须单独放置在一个区域等于该数字的矩形中。

制作步骤： 在孩子看不到的情况下，先用较小的矩形填满大矩形来设置这些谜题。然后将每个矩形的面积写在其内部。最后，只给孩子包含数字的大矩形。

解题策略：

解这些谜题时，首先观察质数的面积 - 它们形状的限制较多。接下来，考虑被包围的区域。在这个谜题中，上面的“4”必须与左上方的 2 x 2 正方形相关。此外，右上角必须用于一个垂直的 3 x 1 矩形。

感受幂的威力

前提：熟练掌握一位数乘法运算

定义与规则

定义：就像 4×2 可以快速书写为 $2 + 2 + 2 + 2$ 一样， 2^4 可以快速表示为 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。说出“2 的四次方”比重复地说“二乘二再乘二……”更容易理解和表达。

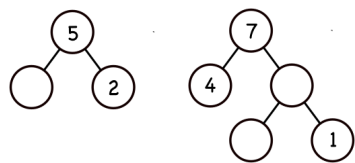
特殊名称：二次方，例如 4^2 ，可以称为四的平方，三次方，例如 4^3 ，可以称为四的立方。

规则：相同数的幂相乘时，遵循一个简单的规则来简化结果 - 即指数相加。例如，计算 $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^5$ ，我们有两个四乘以三个四，因此结果是五个四相乘。

注意：请注意，这个指数相加的规则只适用于同一数的幂次方 - 诸如 $3^2 \times 5^3$ 的乘法运算并不能直接通过这种方式简化。

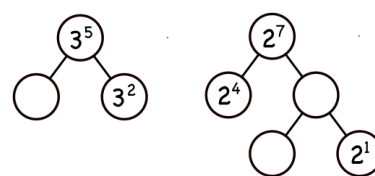
重温曾经学过的加法运算

重用谜题和游戏：由于幂相乘时指数相加，我们以前所有涉及加法的游戏和谜题都可以用于练习乘法运算。以下是一些曾学过的加法运算活动示例：第三章 - 形状求和和组合求和；第四章 - 封闭式求和、数形结合和修复问题。



左边是第三章的两个“形状求和”示例。

右边是使用乘法代替加法的相同示例“形状乘积”。



练习幂次方会变得像原来的加法问题一样熟悉和容易。

变体：如果您的孩子喜欢这些问题并且想要额外的挑战，可以开始涉及多个数字的幂次方运算。例如，如果您计算 $(4^2 \times 3^3) \times (4^5 \times 3^2)$ ，您可以将该规则分别应用于 4 的幂和 3 的幂，得到结果 $4^7 \times 3^5$ 。

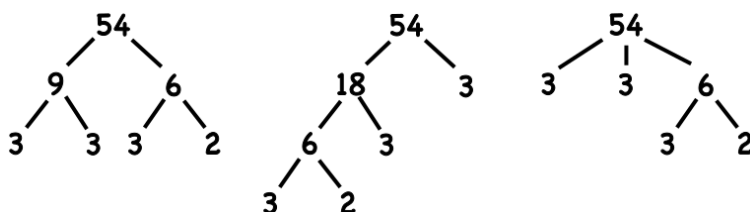
探索质因数分解

前提：能熟练地进行一位数乘法运算

因式树 - 探索活动



因式树模型是对上一页“感受幂的力量”中“图形乘积”的扩展。创建因式树的目标是将一个数字分解成它的质因数。在构建因式树的过程中，可以了解有关该数字的许多信息。



举个例子：从一个数字开始，例如 54。54可以分解成多种方式。一种方法是 9×6 ，另一种是 18×3 ，还有一种是 $3 \times 3 \times 6$ 。

每个分解方式都对应一个因式树的开始。每个这样的因式树最终都会在叶子节点上得到相同的质数。在每个情况下，我们最终都会得到 $2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，但请注意得到这个结果的不同路径！

问题

做了一些类似练习之后，您的孩子可能会自然而然地开始提出一些问题：

- 为什么某些树比其他树有更多的层次？
- 为什么某些树比其他树更宽？
- 为什么叶子节点总是停留在质数上？
- 为什么叶子节点总是具有相同的质数列表，只是可能顺序不同？

基本定理：最后一个问题是一个非常重要的话题，称为算术基本定理。这一定理指出，一个数字可以用质数的乘积唯一地表示！

为什么这很重要？它表明质数是数字的乘法“积木”，一旦你找到了一种构建数字的方法，那就是唯一的方法。如果你知道 $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，那么就无法使用整数来写成 $54 = 5 \times ??$ 。质因数分解的唯一性是许多奇妙数论问题的核心。

用质因数分解进行练习

前提：熟练进行一位数乘法运算

练习质因数分解



活动

在旅行或空闲时按顺序进行质因数分解练习。还可以练习谈论幂。轻松掌握质因数分解将有助于将来学习许多知识，例如分数运算。玩得开心，进行该活动要适度，让孩子感觉舒适。

背诵口诀

口诀如下：

- | | | | |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. 是单位数 | 7. 是质数 | 13. 是质数 | 19. 是质数 |
| 2. 是质数 | 8. 是 2 的立方 | 14. 是 2×7 | 20. 是 2 的平方 $\times 5$ |
| 3. 是质数 | 9. 是 3 的平方 | 15. 是 3×5 | 21. 是 3×7 |
| 4. 是 2 的平方 | 10. 是 2×5 | 16. 是 2 的四次方 | 22. 是 2×11 |
| 5. 是质数 | 11. 是质数 | 17. 是质数 | 23. 是质数 |
| 6. 是 2×3 | 12. 是 2 的平方 $\times 3$ | 18. 是 2×3 的平方 | 24. 是 2 的立方 $\times 3$ |

当孩子遇到困难时，不要急于给出答案，引导他们思考并找到解决问题的方法。

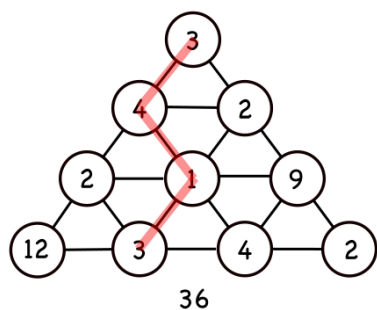
乘积金字塔



智力游戏

这些谜题是第四章看到的加法金字塔的乘法版本。我们会提供一个目标数字和一个数字金字塔。

挑战：挑战是找到金字塔中向下连接的数字路径，使所选数字的乘积等于目标数字。



在这个金字塔中，目标是 36，红色线条表示有效的路径。

这些谜题如果先进行目标的质因数分解会更容易解决。因为 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，所以这些质因数必须在路径中选择，这有助于指导搜索。

知道质因数分解也可以使创建这些谜题变得更加容易。

加减练习

前提：理解两位数的位值以及它与加减运算的关系

100就笑..... 游戏

准备工作：准备一副扑克牌，其中 Q 代表 0，A 代表 1，2-9 代表它们本身的数字。将目标数字设置为 100。随机抽取四张牌并按顺序排列，用它们组成两组两位数，作为公共数字资源。

游戏规则：每位玩家随机抽取 14 张牌，正面朝上摆放。玩家轮流抽牌，在自己的回合中，玩家必须从他们手中所有牌拿出任意两张，分别放置在公共资源的四张牌中的任意两张牌上。如果当前的两组两位数相加等于目标数字 100，则玩家得 1 分。游戏名称取自一个可选动作，即玩家每次成功达到目标金额时都可以笑一声。

获胜条件：当所有牌都用完后，得分最多的玩家获胜。

变体

- 将目标数字设置为100有助于练习10的组成数。然而，其他目标数字也可以提供多样性并练习其他类型的组成数。
- 给玩家多于或少于 14 张的牌。
- 将减法与较小的目标数字结合使用。

5 张牌实现目标..... 游戏

准备工作：选择一个目标数字，例如 100。

游戏规则：每位玩家从 0 到 9 随机抽取五张牌。用这五张牌中的四张组成两个两位数，第五张牌不使用。将这两个数字相加，最接近目标数字的玩家得分 1 分。

获胜条件：在规定轮数后得分最高者获胜。

变体

一种选择是使用三位数、定目标数字为1000，每位玩家抽取七张牌。另一种选择是进行减法运算和设定较小目标数字。

字母代换

前提：理解两位数的数位概念及其与加减运算的关系

字母代换.....



智力游戏

准备工作：在这些谜题中，单个数字被字母代替。乍一看，这些谜题似乎与本章前面看到的“缺失的数字”谜题相同。然而，用字母为解决问题提供了更有趣的机会。如果您的孩子已经熟悉“缺失的数字”谜题，则可以过渡到这些谜题。

字母的使用遵循以下三个规则：

三个规则

- 每个字母始终表示 0 到 9 之间的某个数字
- 数字的最左侧位永远不是 0
- 不同的字母必须代表不同的数字

制作步骤：列出一个普通的加减法问题，替换一个或多个数字。用相同的字母替换相同的数字。在本例中，6 在两个位置都被替换为“A”。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array} \quad \begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}$$

特殊谜题：这种类型的谜题可以创造出有趣的解题挑战。这些谜题的设计要费不少心思，但会带来一些有趣的思考过程。

请注意，字母的值不会在不同的谜题之间延续。在第一个谜题中值为 1 的“B”，在第二个谜题中值为 4。

图形填充

前提：探索图形的形状和规律的好奇心和坚持

用图形填充区域.....



想象你有一个 8×8 的国际象棋棋盘和一套 1×2 的棋子。用 32 个这样的棋子完全覆盖棋盘的方法很简单。

移除角落： 让我们开始尝试从棋盘上移除部分正方形。如果移除棋盘的一个角，你马上就会知道你无法再用棋子覆盖棋盘，因为棋子会覆盖偶数个正方形，而现在只剩下 63 个正方形了。好，移除两个角使剩下的正方形变成偶数个 - 现在你可以用棋子覆盖它了吗？答案取决于你移除的哪两个角。为什么？如果不再限制自己只移除角落，又会发生什么呢？

从细节处学习： 解决这类问题的一个重要方法是从较小的例子中学习。首先尝试在 4×4 或 6×6 的棋盘上进行这些尝试。

变体

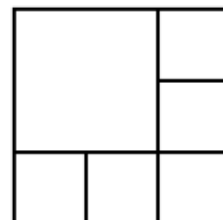
尝试使用其他形状来填充棋盘。尝试用 1×3 的棋子或 3 个正方形组成的 L 形的来填充它。你发现了哪些规律和规则？还有哪些有趣的形状可以用来尝试？

用正方形填充正方形.....



挑战： 用其他正方形填充一个正方形，这些正方形不必都大小相同。问题是：有多少种可能的正方形数量？对于那些可能的，是否有简单的方法来描述如何做到？

让孩子花几天时间玩这个游戏，不要急于得到答案。下图展示了如何用 6 个正方形填充正方形的例子。



变体

如果您只允许使用特定大小的正方形，例如 1×1 、 2×2 和 3×3 ，会发生什么？用相同形状的图形填充其他图形会发生什么？例如，使用所有边长度相同的正三角形。还有哪些图形可以用这种方式进行有趣的探索？

乘法和倍数

前提：熟练进行一位数乘法运算并能跳着数到 100

乘积游戏



准备工作： 使用一张公用的纸，按照如图所示填写。

游戏规则： 第一位玩家将标记放在1-9方格中的任意一个数字上 (1-9)。第二位玩家将另一个棋子放在1-9方格中的一个数字上，并说出6 x 6表格中相应位置的乘积。之后，每位玩家都可以选择移动他们任意一枚棋子并说出新的乘积 (如果可以)。

获胜条件： 第一个在横、竖、斜任意一行上连成 3 个标记的玩家获胜。

变体： 混合乘积数字，以帮助您的孩子更好地识别乘积。另请参阅第五章的扩展材料，了解更大范围的更大棋盘设计。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

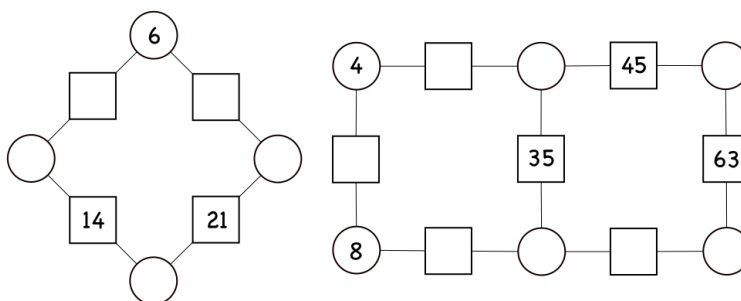
1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

乘积跳岛



这些谜题由岛屿（圆形和方形）和桥梁（线）连接而成。如果正方形的两侧各有一个圆圈，则正方形表示这两个圆圈的乘积。

挑战： 填入缺失的数字。



如何创建： 通过先填入圆圈，然后填入正方形，最后在将谜题交给孩子之前删除一些数字。

除了练习乘法之外，这些谜题还可以用来练习公因数相关的运算。在第一个谜题中，除 1 之外，唯一能同时除 14 和 21 的数字是 7，因此它是底部圆圈中的数字。

加、减、乘

前提：熟练进行两位数加减法和一位数乘法

计算相邻数字



准备工作： 使用三个骰子和一个标有1到64的8 x 8数字棋盘。

游戏规则： 玩家掷骰子，并使用加、减、乘、除运算得到棋盘上任何未标记的数字。玩家标记该方格，并获得该方格的分数+其周围每个已标记方格(包括斜角)的分数。如果玩家无法完成操作，任何可以完成操作的其他玩家都可以获得该分数。

获胜条件： 进行五轮或更多轮游戏，得分最高者获胜。

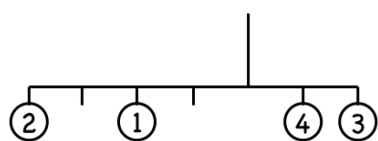
变体

游戏可以选择使用第四个骰子，也可以使用更小或更大的棋盘。

制作平衡挂饰

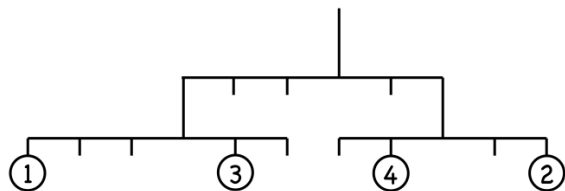


准备工作： 准备一些配重和一个带有若干个挂钩的平衡挂饰设计图。挑战是在每个挂钩上最多放置一个配重，使平衡挂饰沿每个臂保持平衡。假设连接的线没有重量。每个平衡挂饰的臂都是需要平衡的杠杆，因此这些谜题是本章之前提供的“杠杆平衡”谜题的延伸 - 在开始解答这些谜题之前练习那些谜题。



简单示例： 从最简单的平衡挂饰开始，它们就像悬空的杠杆。以下是如何在这个平衡挂饰上放置1到4的配重使其平衡。这是可行的，因为 $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ 。

更复杂的示例： 使用下方配重的总和来平衡顶部金属丝的两侧 $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2$ 。



有关更多示例和平衡挂饰的更深入讨论，请参阅第五章拓展材料。

加、减、乘

前提：能熟练进行两位数加减法和一位数乘法

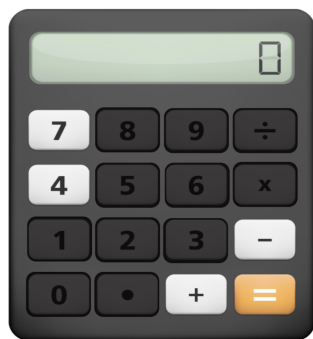
故障计算器.....



智力游戏

准备工作：假设你有一个坏了的计算器，你面临着在计算器上算出某个结果的挑战。这是一个随时可以进行的口头游戏。以下是一些入门示例。

示例：假设你的计算器只有加 (+)、减 (-)、乘 (x) 和除 (/) 功能，但只有一个数字键 4 可以使用。你能算出 21 吗？如果可以，你需要最少的步骤是几步？假设你最多只能使用数字 4 四次，你能算出哪些数字。假设你必须使用数字 4 恰好四次又会有什么结果？尝试使用其他单个数字键并算出其他结果。



示例：假设你的计算器只能加 4 或 7。你能算出哪些数字？

示例：假设计算器只有 4 或 7，但现在它可以加减。你还能算出哪些数字？

这些练习与我们之前在其他场景中看到的 (例如天平秤) 是一样的。

示例：假设你只有一个 1 键，只能加或翻倍。例如， $2 \times (2 \times 1) + 1$ 是 5。你还能创造哪些数字？

示例：一个有趣的挑战是“四个 4”的挑战。假设你有一个只有一个 4 键的计算器，所有运算符都可以使用。从 1 开始，如果你必须在计算器上使用四个 4，你可以创建多少个数字？

因数和倍数

前提：能熟练进行一位数乘法，并逐渐掌握因式分解

抢因子



游戏

准备工作： 使用一个标有 1 到 24 的 4 x 6 数字方格的棋盘。

游戏规则： 轮到玩家时，从没有被覆盖的数字中选择一个至少有一个未被覆盖的因数 - 玩家获得所选数字，另一位玩家可以获得任何或所有未被覆盖的因数 (可以自由选择数量)。轮流进行，直到没有可选择的数字为止。

获胜条件： 玩家计算各自的数字总和，得分较高者获胜。

税务员接龙： 这也可以作为单人游戏“税务员”进行。玩家依次选择每个数字，税务员获得所有可用的因数。游戏一直持续到玩家无法再进行合法操作为止。那时，税务员获得剩下的数字。目标是在可能的情况下，尽量获得比税务员更大的总和。

变体

为玩家设置数字范围 - 可以是 1 到 12，也可以是 1 到 60。

反弹台球

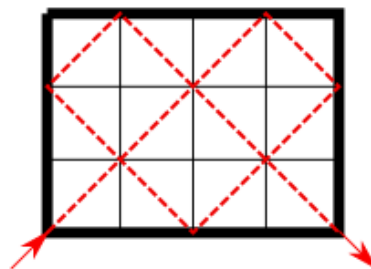


调查

想象一个台球桌，每个角落都有一个球袋。当球从台球桌的侧面反弹时，它会以与入射角相同的角度反弹出去。

这次探索的问题是：如果我们以 45 度角从一个角落射出一个球，它最终会落在哪里？

答案取决于台球桌的大小。下图展示了在 3 x 4 的台球桌上会发生什么。



在玩过几种不同大小的台球桌后，挑战你的孩子提前预测新尺寸的答案。从左下角开始，哪个角落将首先被击中，需要多少次反弹？

因数个数

前提：能熟练进行一位数乘法，并逐渐掌握因式分解

双倍惊喜



游戏

准备工作：玩家们先各自选取 5 个不同的数字，范围大于 20 且小于 121。所有人选择完成后，将数字写在所有玩家都能看到的地方。

游戏规则：使用数字卡片或其他工具生成 1 到 20 的随机数。这个数字会一直翻倍，直到某个玩家的数字首次被命中，或者这个数字变为大于 120。

获胜条件：首位五个数字都被命中的玩家获胜。

选数策略

选择诸如 46 之类的数字并不是一个好策略，因为 46 不是 2 的幂乘以 1 到 20 之间的某个数字 - 它永远不会被命中。一些有许多 2 的因子的数字，例如 32，更容易被命中，因为更多的起始数字可以到达它们。

变体

每次可以将数字乘以 3 而不是翻倍。每次可以翻倍并加 1。对于年龄较小的玩家，可以选择范围大于 10 且小于 60 的数字，并从 1 到 10 生成随机数。

因子之战



游戏

准备工作：准备两组卡片，例如 1 到 25。

游戏规则：使用这些卡片玩标准的“战争”游戏，但现在获胜者是拥有更多因子的卡片。例如，12 比 16 大，因为 12 有 6 个因子 (1、2、3、4、6 和 12)，而 16 有 5 个因子 (1、2、4、8 和 16)。获胜卡的持有者必须能够正确列出其因子才能赢得卡片 - 否则，卡片将被洗回每个玩家的抽牌堆。与标准的“战争”游戏一样，当出现平局时，翻开下一张卡，获胜者获得所有卡。

变体

也可以玩“较少的因子获胜”的游戏。只计算素因数的总数，而不是所有因数。可以玩“素数幂 (质数的幂次方) 击败其他数字”的游戏。

乘法棋盘游戏

前提：一位数乘法和顺数

穿越火山..... 游戏

准备工作： 使用一份 100 以内的数字表格，将四个边缘的36个正方形涂成灰色。使用去掉了人头牌的扑克牌，或者使用 1 到 10 的数字卡片。

游戏规则： 轮到玩家时，如果抽到 1，则可以选择任何奇数；如果抽到其他任何数字，则可以选择它的任何倍数。如果玩家说了一个数字，则对手就不能说该数字。目标是在表格的任何一条边缘创建一个通向另一条边缘的路径。玩家不必按照路径的顺序来构建正方形。

变体

您可以设定斜线连接是否被允许。另一种选择是加入人头牌 - 如果抽到人头牌，则可以放置一个阻挡格，该格子不能包含在任何玩家的路径中。

跳棋数学游戏..... 游戏

准备工作： 这个游戏从跳棋中汲取灵感。每个玩家有10个棋子。棋子编号为1到10，其中“10”号棋子标有10和11。棋子最初放置在100以内数字表格的末行上 - 一个玩家放在1到10的正方形上，另一个放在91到100的正方形上。

游戏规则： 最初，棋子只能根据所选标记上的数字 (或数字) 的任何倍数向前移动一行 - 对于从1到10开始的玩家，向前意味着更大的数字，对于从91到100开始的玩家，向前意味着更小的数字。一旦棋子穿过整个棋盘，它就变成“王”，然后可以向前或向后移动一行。通过落在对手的棋子上可以吃掉对方的棋子。玩家的棋子不能与相同玩家的其他棋子重复放置。

获胜条件： 吃掉所有对手的棋子即可获胜。

变体

对于年龄较小的玩家，可以将棋盘缩短到前 6 行 - 1 到 60 的数字。还不熟悉所有倍数的孩子可以使用顺数来计算移动。

有趣的乘积

前提：一位数乘法和顺数

乘法宾果



游戏

准备工作： 每个玩家开始时拥有一个 4×4 的表格，表格中填入可能的乘积数字 - 这些数字可以随机分配，也可以由玩家仔细选择。

游戏规则： 首先，发两张牌并朝上放置在桌面上。如果任何玩家拥有这两个数字的乘积，他们就可以用标记盖住它。从那时起，玩家轮流从牌堆顶部取牌，并选择替换两张牌中的哪一张。所有拥有匹配乘积的玩家都可以用标记盖住它。

获胜条件： 最先得到 4 个相连的玩家获胜。

互乘谜题



智力游戏

这种乘法谜题可以是 3×3 的，包含 1 到 6 的每个数字恰好一次，也可以是 4×4 的，包含 1 到 8 的每个数字恰好一次。

The challenge: 填入一些空格，每行和每列填入两个数字，使一行中数字的乘积等于最左边标注的数字，并且一列中数字的乘积等于列顶端标注的数字。某些行或列可能没有标注 - 如果是这样，则这些行或列的乘积没有任何限制。

解答示例： 通过找到可以确定两个数字的行和列来解决这个谜题。30 列必须有 5 和 6，10 行必须有 2 和 5。接下来，12 列必须有 3 和 4，4 行必须有 1 和 4。其他部分很容易完成。

		30	12
4			
10			

----->

		30	12
4	1		4
10	2	5	
		6	3

	7	40	18
5			
21			
32			

----->

	7	40	18
5		2	6
21	1		5
32	7		3
		4	8

这个谜题的 5 行必须有 1 和 5，21 行有 3 和 7，32 行有 4 和 8，顶行通过排除法得到 2 和 6。7 列有 1 和 7，40 列有 5 和 8，18 列有 3 和 6，第二列有 2 和 4。将这些信息组合起来得到答案。

如何创建： 与许多此类谜题一样，家长可以先填写谜题内部的数字，记下乘积，然后删除所有内部数字来制作谜题。