

## 第五章 我能數到 100 !

**先決條件：** 可以輕鬆地數到 100 並且對這些數量有相對的理解，尤其是使用位置值。對於個位數加減法心算運用也很紮實。

### — 您曾經去過的地方 —

您的孩子現在可以數到 100! 他們可以輕鬆地用心算對個位數做加法和減法。他們還可以對何數字做向上或向下計數或跳數，該技能延伸可以讓他們能夠用兩位數加減一位數。他們可以對兩位數做比較，並且對 10 位數和個位數的位置值以及其擴展形式的含義有初步的認識。

隨著他們跳數能力的提高，他們也開始培養 2、3、4、5 和 10 的乘數的技能。現在偶數和奇數的概念對他們來說更具有意義了。

前面幾個章節中的一些活動可以使用更大的數字在這裡擴展開。比如第 3 章：形狀，總合，數字再往上增加；第 4 章：戰爭 - 兩位數的加減法、三角形差異 和 總合三角形、修改、數字 1 和 10 的跳島、填空比較、總和平方和加法金字塔。

### — 本章中的新概念 —

- **數到 200** - 現在是時候介紹 百位數位置，透過觀察 100 到 200 的數字來介紹 100 的位置數。
- **跳數到 100** - 這不是新的概念，而是一個需要加強的重要概念。
- **擴展形式和位置價值** ——這是一項基本技能，因此將進一步加強。
- **兩位數的加法和減法** ——跳數將有助於掌握這個竅門。
- **單位數乘法** ——現在是介紹數字 6、7、8 和 9 乘法的時候了。
- **矩形面積是長度 x 寬度** ——這本身就是一個重要的數學概念。這一概念將為許多有趣的新遊戲和涉及乘法和因式分解的謎題提供入門訣竅。
- **因數分解** ——您的孩子將了解數字如何分解為因數的美妙之處。這裡有幾個新詞。數字 1 是一個單位。一個大於 1 的自然數只能被 1 和它本身整除是質數。大於 1 的不是質數的數是合數。3 的平方是  $3 \times 3$ 。3 的立方是  $3 \times 3 \times 3$ 。而 3 的乘方，意味著將 3 乘以自身多次 - 例如，3 的 4 次方就是  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ 。
- **因數、除數和倍數** - 3 被 12 整除。這使得 3 成為 12 的因數 或 除數，而 12 是 3 的倍數。3 是 12 和 15 的因素，12 是 4 和 6 的乘數。
- **個位數除法** ——您的孩子將通過在乘法問題中找到缺失因素的形式間接學習除法。
- **乘法和除法的事實族** ——這兩個運算之間的數學概念將會在此被加強。例如， $2 \times 5 = 10$ 、 $5 \times 2 = 10$ 、 $10 \div 2 = 5$  和  $10 \div 5 = 2$  構成了一個事實族。

### — 法律知識 —

每個家庭都應該有機會一起學習和享受數學。為此，Early Family Math 是一系列材料，家庭和教育工作者可以自由編輯、翻譯、複製和分發，無需徵得許可，僅供非商業用途。

© 版權所有 Early Family Math - Chris Wright 2021 v. 1.1 Creative Commons: Attribution-NonCommercial 4.0 International License

# 乘法心算

先決條件：輕鬆地做一位數加減法、跳數和加倍

## — 介紹 —

這些教學方法為學習個位數乘法提供了結構化的策略。當您的孩子練習這些策略時，他們將學習重要的數字關係，他們最終也會將這些事實背下來。您的孩子應該已經擅長加倍和對任何數字做跳數。

## — $3 \times 4 = 4 \times 3$ —

到目前為止，您的孩子對加法已經非常熟悉，因此  $2 + 3$  與  $3 + 2$  也就不足為奇了。雖然不是那麼明顯，但乘法也是如此。從這個插圖您可以很容易的看出兩排三個圓點與三排兩個圓點是相同的——您只需對您的觀點稍加改變！兩個數字相乘的順序無關緊要 - 無論哪種方式，您都會得到相同的答案！

除了呆版的方式很酷以外，這還意味著您的孩子只需要掌握乘法事實的一半——一旦您的孩子知道  $3 \times 4$ ，他們也會知道  $4 \times 3$ 。

## — 跳數就是乘法 —

跳數對於提升加法和減法技能方面大大有益。它對乘法入門也有很大幫助。

雖然跳數不是找到結果的最佳途徑，但它是可靠的方法，只要您的孩子需要，就應該使用它。假設您的孩子需要找到  $7 \times 3$  的答案。數字 3 的跳數 7 次或者數字 7 的跳數 3 次就可以得到答案 21。

## — 數字 5 和數字 10 的乘法 —

這些事實很快就學會了，為其他乘法事實提供了基礎，它們有助於理解兩位數的位置值。

## — 數字平方 —

正如雙胞胎加法是加法最喜歡的數學事實一樣，平方通常是乘法的最愛。學習這些為學習其他乘法事實提供了基礎。

## — 加倍 —

使用此策略做偶數乘法。例如， $6 \times 7$  的結果是  $3 \times 7$  的雙倍。因此， $6 \times 7$  是 21 的雙倍，答案是 42。

## — 多一個數字或少一個數字 —

此策略對剩餘的乘法事實有助益。

例如， $9 \times 7$  比  $10 \times 7 = 70$  少一個 7。所以它是  $70 - 7 = 63$ 。這個概念可以用在所有 9 的乘法。

類似地， $3 \times 7$  是比 7 的兩倍多出一個 7，所以它是  $7 + 14 = 21$ 。這個方法可以使用於所有 3 的乘法。

## — 9 的乘法 —

儘管最後一個策略涵蓋了 9 的乘法，但它們本身是很有趣的。如果你按順序寫出 9 的倍數，你會看到十位數的數字總是比你乘以的數字小 1 個數字，而個位數字加上十位數字總和等於 9！

# 位置值、加法和減法

先決條件： 了解 2 位數位置值以及它與加法和比較的關係。

## — 製作 100 數字表 —

遊戲

給每個玩家一張畫有 7 行 3 列的紙，在這些列裡標示“10 位數”、“個位數”和“總數”。每個玩家的累計總數從 0 開始。擲骰子或隨機選擇一張從 1 到 9 的撲克牌。每位玩家自行選擇將這些數字放置在個位數或 10 位數的列裡面。例如，如果它是數字 4，它可以成為 4 或者 40。所選的數字將被添加到總數中。超過 100 目標的玩家“爆破”並輸了。如果雙方都沒有爆破，則接近 100 的一方獲勝。

這個遊戲可以用不同的變化：

- 使用不同的目標總數。
- 使用較少或更多行。
- 如果你超過目標，不算爆破。任何一方距離目標總數最近的玩家獲勝。
- 增加第四列的百位數來練習 3 位數字。
- 通過從目標數字開始並減至 0 來練習減法。

## — 宣布所有權 —

遊戲

分享一張帶有 0 到 99 的數字線。一回合，玩家使用兩張從 0 到 9 的隨機卡片，決定這兩位數字的順序，產生一個從 00 到 99 的數字，然後將該數字放在數字線的一側。第一個在一個區域內放置四個號碼並且中間沒有任何對手放置的號碼的玩家獲勝。如果您願意，也可以把數字改成從 000 到 999 進行。

## — 保稅團體 —

謎題

此遊戲有兩個版本。第一個與第 3 章中的總和組拼圖相同，只是現在目標總和可以更大。

	7	9	7	4
	8	4	4	16
20	12	5	9	6
	13	7	7	7

另一個版本使用一個 4 x 4 的棋盤，上面有一個目標數字，比如 20。就像在總和拼圖中一樣，棋盤上充滿了由成雙或者三倍的數字達成的總數。然而，現在將有一個方格與這些組合不相干。遊戲挑戰在於找到那個數字。

## — 遺漏的數字 —

謎題

用一個省略一些數字的簡易加法或減法方程式來設計這個謎題。例如，以下兩個方程式通過省略幾個數字而變成了“遺漏數字”難題。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ -46 \\ \hline 27 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} \_3 \quad 7\_ \\ +46 \quad -\_6 \\ \hline 6\_ \quad 27 \end{array}$$

在對這些數學熟悉了之後，您的孩子可能會有興趣做一些用字母替換的拼圖，這些拼圖在本章後面的加減法頁面中有所描述。

# 乘法卡和表格

先決條件：提昇對所有一位數數字乘法的舒適度

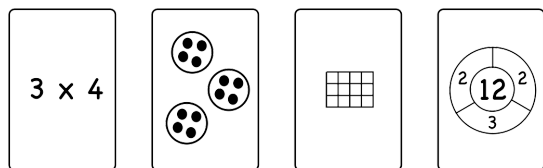
## — 製作乘法表 —

### 活動

製作一組乘法表來練習這些數學因數，同時與您的家人一起玩之前玩過的配對遊戲：第 1 章 - 釣魚，記憶挑戰；第 2 章 - 寶果遊戲；第 3 章 - 熱土豆；和第 4 章 - 杜松子酒。

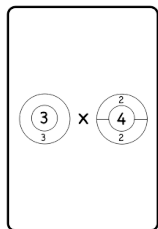
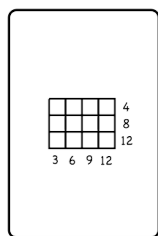
手繪四張卡片包含每個數學事實 - 1) 表達式 2) 對象組，3) 一個數組，以及 4) 質數分解。如果您將這些製作成撲克牌大小 (2½" x 3½")。您可以使用可轉印文件中的模板。

以 3 x 4 的卡為例。這四張牌將會是：



這些牌可以有多種選擇。一種選擇是包括 3 x 4 而不包含 4 x 3。雖然這意味著您製作的卡片數量大約是一半，但它的缺點是您只會看到 3 組 4 並且它與看到 4 組 3 是不同的。

對於陣列卡，在卡的兩側放置跳數數字，如此可幫助您的孩子做跳數練習。



對於標示卡，以質數取代數字。如此，在對兩個數字做乘法練習時候容易理解質數的關係。

## — 展示產品 —

### 謎題

從一個含有 4 行和 4 列的空白乘法表開始。在表格的頂部和左側各有一組四個的缺失數字——這些數字將包含從 2 到 9 的一些數字，並且這些數字可以重複。

背著您的孩子將表格填寫，然後將表格翻面或者覆蓋所有數字。您的孩子可以要求您一次透露 16 個裡的一個數字，最多透露 10 個。遊戲目標是在所有數字被揭示之前找出表格頂部和左側的數字。

X	5	3	7	8
2	10	6	14	16
9	45	27	63	72
8	40	24	56	64
5	25	15	35	40

想像一下，在這個示例中所有的卡片都被揭露了。如果您的孩子恰巧翻開了數字 63 的卡片，那麼他們就會知道它是 7 和 9 相乘。

翻轉與 63 同行或列中的任何卡片將顯示相關數字 7 和 9。假設他們翻轉的第二張牌是數字 56 所在的位置。他們不僅會知道第三列是數字 7，他們還會知道第二行是數字 9，第三行是 8。

尺寸大一些的卡片也適用。例如，具有 5 個空白行和列且最多允許 12 次翻轉的表格也非常適合的。

選擇您希望您的孩子練習的數字放置在頂部和左側的表格。

# 因數、倍數和質數

先決條件：提昇對所有數字的個位數乘法的舒適度

## — 覆蓋 — 遊戲

設計一個從 1 到 30 的數字板。用兩種令牌 - 一個為了“最終一步”--保留的單一令牌，以及一堆其他令牌。

第一個玩家可以選擇任何一個數字並可以使用“最終一步”的令牌覆蓋它。之後，其他玩家以其他的令牌將“最終一步”的令牌替換，並將最後一個移動的令牌移動到任何數字而且該數字是上次被移動數字的因數或倍數。失敗的玩家是被迫覆蓋數字 1 的人。

隨著孩子們對這個遊戲玩法越來越熟練，他們會發現他們需要遵循規則來完成他們合理的第一步。最基本的規則是，第一步不能在上半部分數字的質數上。

根據玩家的技能水平調整數字範圍 - 您可以使用 1 到 24、1 到 48，甚至 1 到 60。

## — 有因數的尼姆遊戲 — 遊戲

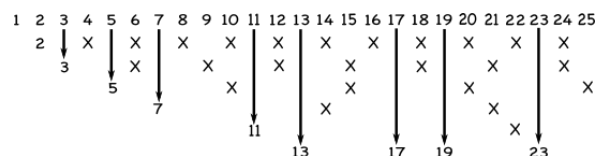
從任何數字開始，比如 20。讓您的孩子決定誰先開始。在遊戲回合中，玩家可以從數字中減去當前數字的任何除數。玩家被迫 0 輸。

在您的孩子熟悉遊戲後，鼓勵他們尋找非常簡單的遊戲策略——一旦他們發現了它，看看他們是否能解釋它為什麼有效。

## — 質數表-埃拉托斯特尼篩法 — 活動

孩子們很愉快的輸入“X”在埃拉托斯特尼篩法的質數表，並看著質數在表裏面顯示。這項活動創造出許多有趣的可分性和質數的特性。

一條 1 到 25 的數字線開始 - 在空間和玩家的耐心允許之下，擴大數字範圍。



在數字 2 的下方寫下數字 2。在數字 2 的同行，在所有 2 的倍數之下畫“X”。

現在，將所有沒有被畫“X”的最小數字（在本例中為 3）並將它們一一的寫在下一行。在數字 3 下面寫下 3 並將“X”放在同一行的所有 3 的倍數下方。重複如此的動作，繼續將下一個最小的數字寫在其下方並用“X”標記它們的倍數。完成以後，您已經將所有的質數都寫在其下方了。請記住數字 1 是一個單位而不是質數！

這裡提供了一些問題，可以在您的孩子玩這個遊戲時與他們討論：

- 為什麼數字被寫在下方的為質數？
- 需要被劃掉其倍數的最後一個質數是什麼？為什麼其他質數沒有用？
- 對於所有有用的質數，它們的哪些倍數產生了新的限制，哪些沒有用？
- 如果你有一個數字，比如 53，您需要用哪些質數除以它來確認它是一個質數？



# 混合操作

先決條件：輕鬆掌握兩位數加減法和一位數乘竅門

## — 混合 — 遊戲

使用一組有數字 1 到 25 的編號卡，或您的孩子可以接受的任何數字範圍。隨機選擇一張卡作為每個人的目標號碼。將該卡片放回到卡堆裡面。發給每位玩家五張卡，各自以任何順序和任何操作方式，讓手中的卡盡可能地接近目標號碼。最接近的玩家贏得這一輪。

另外一種變通的得分方式，就是玩家會得到兩倍的點數當他們達到目標；玩家在得到外來幫助下擊中目標時獲得 5 分；玩家幫助他人擊中目標，可以獲得 6 分。

## — 秘密行動 — 活動

在第 4 章接近尾聲時，有一個總和差異活動，在此活動裡一個玩家心裏想兩個數字，然後通過告訴其他玩家那些數字的總和和差異來挑戰他們找出那兩個數字。秘密行動這個活動採取了相同的概念，只是現在挑戰者可以使用任何兩種數學方式，例如乘法和減法。

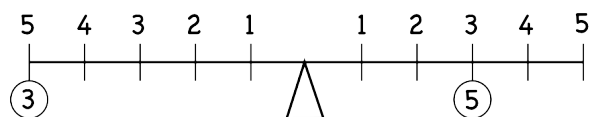
例如，挑戰者會說“哪兩個數字的計算結果是 12，其差異為 4？”如果您願意，您也可以將其擴展為三個數字 - “哪三個數字的計算結果為 12，總和為 8？”

## — 括號拼圖 — 拼圖

對於成年人而言，這些拼圖非常容易製作。採取任何的數學方程式，例如  $9 = (2 + 7) \times (5 - 2 \times 2)$  並將括號刪除。您的孩子面臨的挑戰是如何在  $2 + 7 \times 5 - 2 \times 2$  此方程式上加上括號並使其結果為 9。

## — 槓桿平衡 — 調查

使用槓桿原理練習乘法和加法。該原理指出，質量在槓桿一側施加的力量等於質量乘以它與樞軸點（支點）的距離。一側來自多個質量力量相加總合等於總力量。要使槓桿維持平衡，兩側的總力必須相等。



現在有一個 3 個單位的重量和一個 5 個單位的重量被放置在支點的兩側。他們應該在哪個位置才可以達到平衡？這個問題的答案可以是距離 5 和 3，但它也可以是 10 和 6，或甚至更大的距離 15 和 9。

如果有一個 3 單元和 5 個單元重量放在槓桿其中的一側，您可以將重量放在另一邊的哪個位置？如果兩個重物在槓桿的不同側又該怎麼辦？這個問題延續了第 4 章末尾“讓它數數”頁面上的問題。

# 乘法和表格

先決條件： 對一位數乘法有相當理解

## — 挑戰 - 乘法 —

### 遊戲

從一副牌中將圖片卡取出，並且平均分配給兩名玩家。為了更加集中乘法練習，請同時刪除 A 和 10 的牌。

每個玩家把兩張牌翻面，然後將它們相乘，擁有較大乘數結果的玩家贏得所有四張牌。如果參與玩家的乘數結果相同，則再各自翻開兩張牌，獲勝者將保留所有八張牌。在特定時間裡取得最多牌的玩家為贏家。

## — 嗶嗶 —

### 遊戲

首先設定一組用於此遊戲的數字。它可以是奇數，也可以是 3 的倍數以及其中包含 3 的數字，也可以是任何提供了良好乘法練習的數字組。

兩個或多位玩家輪流說出從 1 開始的數字。當一個玩家說出一個與事先設定的數字相同的數字時，必須說“嗶嗶”。如果他們沒有喊“嗶嗶”，或者對於錯誤的號碼發出“嗶嗶”聲，他們就出局了。最後剩下的一位玩家獲勝！

## — 連續 3 個 —

### 遊戲

使用一副帶有 Q（作為 0）、A（作為 1）和 2-9 的牌，或使用四組 0 到 9 的數字卡。在一張畫有 4 x 5 的網格上，隨機在 20 個空格內填上 5 和 10 的倍數。發給每位玩家一組代幣。玩家隨機將代幣放在 5 或 10 的倍數網格內。一旦某個網格被佔，其他玩家就不能用那個網格。第一個連續將 3 個代幣排成一直線的玩家為贏家。

數字 5 和 10 可以用，例如 2 和 4，或 3 和 6 這些數字來代替。以上這些數字有助於理解乘法的倍數邏輯。例如，如果玩家不知道  $6 \times 7$  的乘法，他們可以將  $3 \times 7$  翻倍來得到答案。

## — 表格翻轉 —

### 謎題

填入標準乘法表是很無聊的活動，孩子們很快會意識到她們可以使用加法而不是乘法來填寫它。要真正練習乘法，以及練習解決數學問題和因式分解，請為您的孩子設計一個混合的乘法表。

通過將行和列移動來製作這些表格，並在其中把大部分的表格空白。以下是使用 2 到 9 乘法的示例：

X	5				6			
2								
		40						
				49				
	20					36		
		72						
			9					12
					48			

從獨特的數字開始來解決問題。數字 20 是藉由 5 乘以 4 而來的，所以可以知道數字 36 最頂上的那一欄就是數字 9。因此，數字 49 就是數字 7 的乘法。數字 9 是由 3 乘以 3 的結果。現在數字 12 頂端的數字就會是 4。如此繼續這個數學偵探工作直到所有的表格都被填滿了數字。

# 矩形區域

先決條件： 掌握了一位數乘法和兩位數加法的竅門

## — 簡介 —

長方形的面積是長乘以寬。至少可以通過兩種方式讓您的孩子了解這個規則。第一個是將矩形畫分成多個正方形。第二種是使用數字形狀來展示如何將一個數量例如 12 放入一個數組中 - 它可以由  $3 \times 4$ 、 $2 \times 6$  或  $1 \times 12$  組合成。了解矩形面積為我們提供了一個有趣的乘法和因式分解的遊戲舞台！

## — 重新訪問的數字形狀 —

探索

從一堆小物件開始，比如葡萄乾。對於那些物件的數量做探索，您可以利用這些數量的小物件製作出哪種矩形。1 只能由一個  $1 \times 1$  的矩形組成，而 1 稱為一個單元。對於數字 5，僅可以有  $1 \times 5$  和  $5 \times 1$  的矩形。被稱為質數。不是單位或質數的數字稱為合數。-因為它們是由質數相乘而組成，例如  $12 = 2 \times 2 \times 3$ 。

每個矩形的面積值是由數字均分的值組成並相乘得出數字。製作矩形是體驗整除規則的直接方式。諸如 16 之類的數字被稱為正方形，因為它們其中的一個矩形是正方形——16 的一個矩形是  $4 \times 4$  的正方形。

## — 圍場遊戲 —

遊戲

給每一位玩家一張方格紙。輪到的玩家，使用兩張從 1 到 10 的撲克牌來判定矩形的面積。如果玩家的紙有空間，則其可以將矩形放置在其內部不與現有矩形重疊的任何位置。一旦放置後，它的內部會被輕輕地塗上陰影，並且在上面標示它的面積和尺寸。如果沒有空間，則輪到下一個玩家。總數最大的玩家獲勝。對於一張普通的方格紙，這可能會是一場漫長的遊戲——通過使用一半的紙或限制玩的次數來減少遊戲時間。

## — 將盒子分割 —

謎題

一個  $4 \times 4$  或更大的矩形，用數字填滿其中一些正方形，為了將其分割成更小的矩形。每個數字必須代表一個單獨的矩形，其面積為該數字。

在您的孩子沒看見的時候，先用較小的矩形填充大矩形。接下來，將面積放置在每個矩形中。最後，給你的孩子一個只有數字的大矩形。

			3
	4	3	
	2		
4			

要解開這個謎題，首先看質數區域。此外，有時一個區域被框起來——在這個謎題中，上方的“4”必須與左上角的  $2 \times 2$  方格相關。接下來，右上角必須用在垂直的  $3 \times 1$  矩形中。繼續前進！



# 感受力量

先決條件：輕鬆的掌握一位數乘法

## — 定義和規則 —

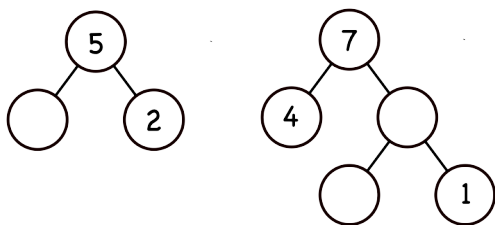
正如  $4 \times 2$  是  $2 + 2 + 2 + 2$  的簡單方程式，所以  $2^4$  的快捷方式就是  $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。“二的四次方”比起“二乘以二乘以二……”來的容易說。 $N$  的次方有兩個相關的特殊名稱。例如二次方， $4^2$ ，可以說是四的次方，三次方，例如  $4^3$ ，可以說是四的三次方。

當兩個相同數字的次方相乘時，一個簡單的規則將結果簡化一次方相加。例如，如果你做  $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^5$ ，我們有兩個四乘以三個四，所以結果是五個四相乘。請注意，此規則僅適用於相同底數的情況。

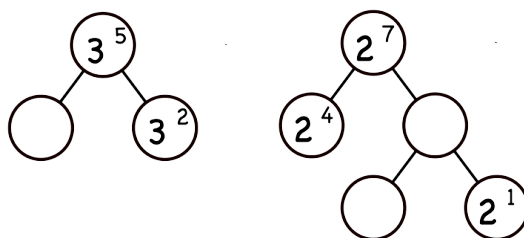
## — 沿用舊的數學活動 —

因為當同底數幂相乘時指數相加，我們曾經用過的任何涉及加法的舊遊戲和謎題都可以用來練習幂的乘法。這方面的一些例子是：第 3 章 - 形狀總和和總和組；第 4 章 - 封閉總和、三角形總和 和 固定它。

以下是第 3 章中用於形狀總和的兩個示例。



這是兩個相同的形狀示例，在此我們使用乘法而不是加法。



通過練習，這會變得很常規，就像最初的加法問題一樣簡單。

如果您的孩子喜歡這類的數學活動並且想要一些額外的挑戰，可以開始涉及多個被提升到幂的數字。例如，如果您相乘，

$(4^2 \times 3^3) \times (4^5 \times 3^2)$  您可以將我們的規則分別應用於 4 的幂和 3 的幂，並且得到結果  $4^7 \times 3^5$ 。

## — 練習質數分解 —

當您旅行並有充足時間時，練習的一個絕妙方法是按照順序背誦數字的質數分解。這也為談論次方提供了練習。了解質數因式分解將在許多事情中有所幫助，例如數學分數問題。讓數學學習有趣，不要過度超出您的孩子接受的範圍。

它是這樣的：1 是一個單位，2 是質數，3 是質數，4 是 2 的平方，5 是質數，6 是  $2 \times 3$ ，7 是質數，8 是 2 的立方，9 是 3 的平方，10 是  $2 \times 5$ ，11 是質數，12 是 2 的平方乘以 3，13 是質數，14 是  $2 \times 7$ ，15 是  $3 \times 5$ ，16 是 2 的四次方。如果您的孩子學習中有困難，請幫助他們理解其中的規則，而不是把答案告訴他們。

# 分解質數

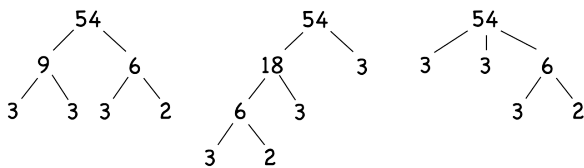
先決條件： 掌握一位數乘法技巧

## — 樹狀因數分解 —

探討

因數分解是前一章提到的感受到力量裡形狀數學的延伸。目的是在於利用因數分解來產生質數。因數分解的過程中，可以了解到關於數字的很多東西。

從一個數字開始，比如 54。這可以被幾種方式分解。一種方式是  $9 \times 6$ ，另一種是  $18 \times 3$ ，還有另一種方式是  $3 \times 3 \times 6$ 。每一種都會產生不同的開始。



這些樹狀分解法是將相同的質因數的連乘積以指數的方式標示。在每個題目下，我們最終都會得到  $2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，只是以不同方式得到相同的結果！

在做了一些這樣的例子之後，你的孩子可能會自然地開始提出一些問題。

為什麼有些樹的層次比其他的樹多？為什麼有些樹比其他樹更寬？為什麼總是停在質數處？為什麼結果都是有相同的質數，也許有重排？

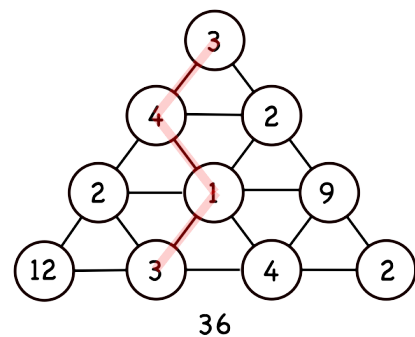
最後一個問題是一個非常大的問題。它是如此之大，以至於被稱為算術基本定理。它說每個數字只有一種表示為質數乘積的方式！

你可能會問：為什麼這麼重要？因為質數是數字的乘法的基礎積木，一旦你找到了一種構建數字的方法，那就是唯一的方法。如果您知道  $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，則無法使用整數來寫  $54 = 5 \times \underline{\quad}$ 。質因數分解的獨特性是許多美麗數論的核心。

## — 金字塔 —

拼圖

這些是第 4 章裡金字塔拼圖的乘法版本。目標數字和金字塔裡的數字已經提供。遊戲挑戰是在金字塔裡找到一條連接數字的路徑，而且此途徑裡數字的乘積是目標數。



這個金字塔中的目標是 36，紅線表示有效的路徑。您的孩子可能會注意到，如果他們從質數開始，這些謎題會容易得多。因為  $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，他們知道他們必須沿著路徑挑選那些質數，這有助於解答。成年人了解質因數分解也可以讓這些謎題的設計更容易。

# 加減法

先決條件： 了解 2 位數位置值以及它與加法和減法的關係。

## — 100 的樂趣 —

### 遊戲

使用一副帶有 Q（作為 0）、A（代表 1）和 2-9 的紙牌。將目標數字設訂為 100。隨機選擇四張牌，用於製作一對 2 位數字。

每位玩家擁有 14 張隨機正面朝上的牌。玩家輪流玩。在一個回合中，玩家用兩張牌替換四張牌中的兩張，所得的一雙牌的數字相加必須等於目標。如果沒有達到目標，則輪到下一位玩家。第一位把牌用完的玩家獲勝。如果雙方玩家平手，則擁有牌數較少的玩家贏了。

遊戲變更，可以更改目標總數並且將原來的 14 張牌數減少或增加。另一種選擇是用減法並且使用較小的目標數。

## — 5 張牌達到目標 —

### 遊戲

選擇一個目標數字，比如 100。每個玩家隨機選擇五張從 0 到 9 的牌。從這些牌裡組成兩對 2 位數字，保留第五張牌。將這兩對兩位數字相加，最接近目標的玩家贏得一分。在特定回合之後，積分最高者獲勝。

另一種遊戲的變通選擇是使用三位數字，目標數字改為 1000，發給每位玩家七張牌。另一種選擇是使用減法以及較小的目標值。

## — 字母替換 —

### 拼圖

一旦您的孩子對於本章前面幾頁的缺失數字拼圖有相當的理解，他們可以開始進行以下的難題。其中，一位或多位數字會被字母取代。字母的三個規則是：

- 特定的字母總是代表相同的數字
- 最左邊的數字永遠不會是 0
- 不同的字母必須代表不同的數字

融入加法或減法問題在這個數學題目裡。並且用字母替換一個或多個數字，範例在以下的示例中：

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

也可以為您的孩子創建有趣的解決問題的拼圖。

$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}$$
$$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array} \quad \begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}$$

請注意，字母的值不會從拼圖轉移到另一個拼圖。

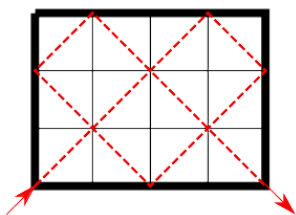
# 形狀內部形狀

先決條件：具有好奇心和持續找到涉及形狀的模式

## — 彈跳台球 —

### 調查

想像一張台球桌的四個角落各有一個口袋。當球從桌子的一側彈起時，它會以與彈起時不相同的角度彈開。來探討這一個問題：如果我們從一個角落以 45 度角射球，它最終會落在哪裡？答案取決於桌子的大小。例圖是在一個  $3 \times 4$  表上發生的情況。



在玩過幾次這個遊戲之後，讓您的孩子預測答案。從左下角開始，哪個角落會先被擊中，需要多少次彈跳？

## — 用形狀填充區域 —

### 探索

假設您有一個  $8 \times 8$  的棋盤，並且您有一組  $1 \times 2$  的瓷磚。找到一種用 32 個這樣  $1 \times 2$  尺寸大小瓷磚覆蓋整個棋盤的方法很簡單。

讓我們開始從棋盤上將一些磁磚移走。如果您將棋盤角落裡的一個磁磚移走，您立即會發現您的瓷磚無法再覆蓋整個棋盤，因為需要偶數方格才能完成覆蓋，現在剩下 63 個方格。那麼，如果去掉兩個磁磚呢——剩餘的正方形磁磚是個偶數——您現在可以覆蓋它嗎？答案取決於哪兩個角落被您移除了。為什麼？如果移除角落磁磚的規定不存在，又會發生什麼？

解決此類問題的一個重要訣竅是從處理較小的問題中學習。首先在  $4 \times 4$  或  $6 \times 6$  棋板上嘗試這些問題。

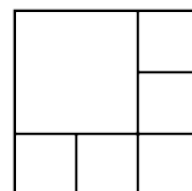
如果您的孩子喜歡這類問題，請開始擴展到使用其他形狀來填充黑板。使用  $1 \times 3$  的瓷磚或用 3 個磁磚填滿 L 形板子。您從這些發現了哪些模式和規則？還有什麼其他有趣的形狀可以練習？

## — 用正方形填充正方形 —

### 探索

用什麼方法可以用正方形填充一個大正方形，而這些正方形不需要都具有相同的大小？然而，每個正方形的邊長必須是固定長度的整數倍。需要探索的問題是：需要有多少個正方形來完成？如果您知道某一個數字是可能的，有沒有一種簡單的方法來描述如何做到這一點？

給您的孩子幾天的時間嘗試這個遊戲，不要急於找到答案。這是一個圖表，顯示了 6 的可能性。



如果您的孩子喜歡探索這類的問題，探索這個主題的變化。假設您只允許使用特定大小的正方形——例如  $1 \times 1$ 、 $2 \times 2$  和  $3 \times 3$ 。另一個觀察方向是用具有相同形狀的圖形填充其他圖形。例如，對正三角形（所有邊都相同的三角形）問同樣的問題。以這種方式探索有哪些數字很有趣，哪些規則根本無趣——是哪些？

# 乘法和倍數

先決條件：理解個位數乘法以及到 100 的跳數

## — 產品遊戲 — 遊戲

使用一張紙，並且按照以下填寫：

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

第一位玩家將一個代幣放到 1-9 方格中從 1 到 9 的任何數字上。第二位玩家將另一枚代幣放在 1-9 方格中的任何一個 6 乘 6 的方格上，佔有那個方格。從那時起，每位玩家有選擇權取走兩個代幣（如果情況允許的話）。第一位連續佔據 3 個方格並且連成一線的玩家獲勝。

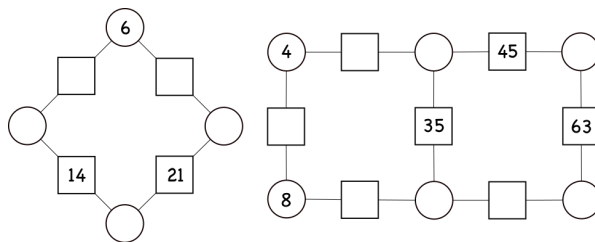
將方格編號混合，讓您的孩子對數字有更好地練習。有關於更大範圍的更大紙板的設計，請參閱第 5 章附加材料。

## — 附帶數字的跳島遊戲 — 拼圖

這一個拼圖具有由橋（線）連接的島嶼（圓圈和方塊）。如果一個正方形的兩邊有兩個圓圈，那麼這個正方形就是兩個圓的乘積。拼圖挑戰是填補缺失的數字。

製作這些拼圖，先將數字填入圓圈裡，然後填方格，最後去掉一些數字，最後再給您的孩子去完成。

這個拼圖除了練習乘法之外，還可以用來練習公因式。在第一個拼圖中，除了 1 之外，唯一能整除 14 和 21 的數字是 7，所以這就是底部圓圈中的數字。



## — 棋盤格數學 — 遊戲

這個遊戲的靈感來自跳棋。每個玩家有 10 個代幣。代幣編號從 1 到 10，“10”的代幣標有 10 和 11。此代幣從 100 圖表的最後幾行開始 - 一個玩家在 1 到 10 方格上，另一個玩家在 91 到 100 方格上。

最初，代幣只能“向前”移動一行到他們選擇的標記上的任意倍數上——對於從 1 到 10 開始的玩家，向前意味著朝更大的數字前進，對於從 91 到 100 開始的玩家，向前走意味著走向更小的數字。一旦代幣一路移動到棋盤的另一端，它就會成為國王，然後可以向前或向後移動一排。對手的棋子因為棋子落地被取走。玩家的棋子不能與另一玩家的另一個棋子重疊。您通過贏走對手的所有棋子而獲勝。

對於年紀較小的玩家，縮小棋盤的尺寸，使用前 6 行——從 1 到 60 的數字。對於不熟悉倍數的孩子可以使用跳數來計算。



# 加法、減法、和乘法

先決條件：熟悉兩位數加減法和一位數乘法

## — 鄰居計數 —

遊戲

使用三個骰子和一個  $8 \times 8$  的 1 到 64 的數字板。玩家擲骰子並使用加法、減法、乘法和除法來產生板上任何未標記的數字。玩家在方格內做下標記，並獲得一分，而且她所觸及的每個標記方格多加一分（包括對角線）多加一分。如果一名玩家無法完成，任何其他找到答案的玩家都可以獲得該分數。進行五回合或更多回合，得分最高者獲勝。

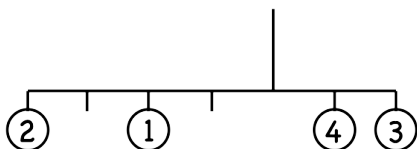
遊戲變更，是使用四個骰子，並使用更小或更大的棋盤。

## — 製作手機 —

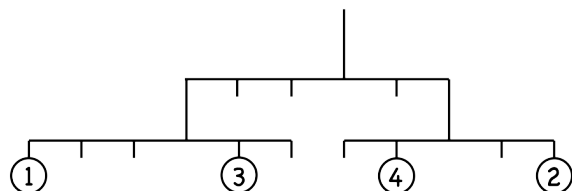
謎題

你得到了一些重量和一個有一些連接點的小車子的設計。挑戰在於在每一個連接點放置一個重量，以便保持平衡。假設附帶的線是沒有重量。小車的每個延伸都是一個需要平衡的槓桿，所以這些謎題是前面章節提過的槓桿平衡謎題的延伸——首先練習那個章節之後再練習這些謎題。

從最簡單的機器開始，它們只是空中的槓桿。以下示圖是將重量從 1 到 4 放在此設備上以平衡它的解決方案。這是因為  $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ 。



這是一個更複雜的平衡圖。使用其下方的總重量來平衡頂線的每一側  $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2$ 。



有關更多示例和槓桿設備的詳細討論，請參閱第 5 章補充教材。

## — 有限的計算機 —

謎題

前提是您有一個嚴重損壞的計算機，並且您需要在計算機上算出結果。只要您有空閒時間，就可以輕鬆地進行口頭演算。下面是一些幫助您入門的示例。

假設您有一個帶有 +, -, x, 和 / 的計算機，而且只有一個數字鍵 4 是可以用的。您能夠算出數字 21 嗎？如果可以，您需要使用的最少步驟是多少？假設您最多可以使用數字鍵 4 四次 - 您可以得到哪些數字？假設您必須使用數字鍵 4 四次。嘗試著使用其他單鍵並產生其他結果。

假設您的計算機只能加 4 或 7。您能夠算出哪些數字？假設它有 4 或 7，要如何加和減呢？您可以得到哪些數字？這與我們在其他地方看到的活動相同。

假設您只有一個數字 1 鍵並且只能添加或加倍。例如， $2 \times (2 \times 1) + 1$  是 5。您還可以創建出哪些其他數字？

# 因數計數

先決條件： 可以做一位數的乘法，並且理解分解數字

## — 獲取因數 — 遊戲

使用一個  $4 \times 6$  格子數字從 1 到 24 的棋盤。在一個回合中，玩家選擇一個未被發現的數字，並且至少含有一個未發現的因數——玩家得到選定的數字，另一名玩家得到任何或所有未發現的因數（玩家選擇多少）。輪流玩，直到沒有可以選擇的號碼為止。玩家將他們擁有的數字相加，總合越大者獲勝。

這也可以作為單人紙牌遊戲來玩，有時也稱為“退稅人”遊戲。在這個版本中，一個玩家選擇數字，退稅人得到所有可用的因數。遊戲繼續，直到玩家不可以再繼續——那時，退稅人得到剩餘的數字。我們的目標是盡可能獲得最多的數目——在可能的情況下比退稅人還多。

使用適合玩家的能力的數字範圍 - 可以是 1 到 12 或高達 1 到 60。

## — 雙倍或無 — 遊戲

遊戲開始，玩家秘密選擇 5 個大於 20 且小於 120 的不同數字。選擇後，將它們寫在所有人都可以看到的方格。

使用號碼卡或其他卡片，創建一個從 1 到 20 的隨機數。該數字被反復加倍，直到某位玩家的號碼與其相同或該號碼超出了 120。第一個與所有五個號碼相同的玩家為贏家。

在您的孩子玩了幾次之後，他們將開始領會選擇五個號碼的策略。一個簡單的策略是選擇了一個不是很完美的數字，例如 46，它不是 1 到 20 之間某個數字的 2 次冪 - 因此它永遠不會被配對。一些有很多 2 因數的數字，例如 32，更有可能被擊中，因為有更多的數字與其相關。

還有許多其他的變通玩法。您可以將數字增加三倍，而不是將其翻倍。您可以將其加倍並且每次添加一個數字。對於年紀較輕的玩家，選擇大於 10 且小於 60 的數字，並從 1 到 10 中隨機選擇一個數字。

## — 因數挑戰 — 遊戲

使用兩副牌，比如說從 1 到 25。用標準規則玩這個遊戲，現在，擁有更多因數牌的是獲勝者。例如，12 擊敗 16，因為 12 有 6 個因數（1、2、3、4、6 和 12），而 16 只有 5 個因數（1、2、4、8 和 16）。贏家必須能夠正確地列出所有贏得牌的因數 - 否則，牌會被洗回每個玩家的抽牌堆裡。與標準挑戰遊戲一樣，當出現平局時，翻轉下一張牌，獲勝者將獲得所有牌。

有幾種變通方式可以供您使用。您可以讓擁有較少因數的玩家獲勝。您可以只計算主要因數的總數，而不是計算所有因數。您可以用質數冪決定贏家（作為質數冪的數字）擊敗其他數字。

## 有趣的乘積

**先決條件：** 個位數乘法和跳數

## — 乘法寶果 —

## 遊戲

每一位玩家從一個 4 x 4 的數字網格開始，這些數字將是可能的乘積 - 這些數字可以是隨機選取的或由玩家仔細選擇的。

首先，發兩張正面朝上的牌並放在桌子上。如果任何一位玩家有這兩個數字乘積的牌，他們就把它翻面。從那時起，玩家輪流從抽牌堆中取出最上面的一張牌，並選擇用哪兩張牌來替換。有匹配的牌，玩家就將其翻面。第一個連續獲得 4 張牌的玩家獲勝。

## — 穿越火山 —

遊戲

使用數字 100 圖表，其中四個角落上的 36 個正方形塗成灰色。使用去除了圖片卡的撲克牌或者從 1 到 10 的數字卡。

在回合中，如果您抽到數字 1，您可以要求擁有任何奇數的卡；如果您選擇了任何其他數字，您可以要求它的任何倍數。如果您認領了一個號碼，您的對手就不能認領它。目的是創建一條從任何一個方向到達另一邊的路徑。您不需要按照你的路徑順序認領方格。

您可以決定對角連接是否可以。另一種選擇是包括圖片卡 - 如果您獲得其中一張圖片卡，您可以將其放入一個不能被包含在任何人的路徑中的方格內。

## — 交叉乘積 —

拼圖

此乘法拼圖是一個  $3 \times 3$  網格，涉及的號碼  $1 \sim 6$  只能出現一次，或  $4 \times 4$  的網格，涉及的數字  $1$  到  $8$  只可以使用一次。挑戰是用數字填入網格內，每行和每列各有兩個數字，因此，每一行的乘積就是最左側標示的數字，每一列的乘積就是列頂端標示的數字。某些行或列可能未被標示 - 如果是如此，則對這些行或列的乘積不做任何制。

Diagram illustrating a swap operation on a 3x3 grid. The initial grid (left) has values 30 and 12 in the top row. The transformed grid (right) shows the result of swapping the values 4 and 10 in the first column, with the new values 1, 2, and 6 appearing in the first column and 4, 5, and 3 in the third column.

通過查找每一列和行缺失的兩個數字來完成這個拼圖。圖表中，列頂端的數字 30 必須含有 5 和 6，數字 10 的那一行必須有 2 和 5。接下來，列頂端的數字 12 必定含有 3 和 4，數字 4 的那一行必須有 1 和 4。其餘的很快就可以找出來了。

Diagram illustrating the transformation of a 3x4 grid structure:

**Left Grid:**

	7	40	18	
5				
21				
32				

**Right Grid:**

	7	40	18	
5		2		6
21	1		5	
32		4	8	

A dashed arrow points from the left grid to the right grid, indicating a transformation.

製作這些拼圖，成年人可以通過先把拼圖內部的數字全部填寫，並寫下乘積，然後再一一刪除內部所有的數字。