가족과 하는 놀이 수학

Early Family Math

5장 보너스 자료

— 소개 —

의도적으로 수업에 대한 간략한 설명에 더 많은 예, 토론 및 설명이 포함되기를 원하나요? 그렇다면 제대로 찾아오셨습니다! 이 파일에는 5장의 일부 활동에 대한 보너스 자료가 포함되어 있습니다.

퍼즐의 경우 퍼즐을 만드는 방법에 대한 추가 설명과 함께 해결된 퍼즐의 많은 예가 제공됩니다. 가족과 하는 놀이 수학 프로그램은 기초 수학은 가족이 함께 해야 하는 것이며 아이가 여러분과 함께 할 수 있는 퍼즐을 만드는 것은 그 과정의 중요한 부분이라는 생각에 기반을 두고 있습니다. 각 퍼즐에 익숙해지면 모든 퍼즐은 아니더라도 대부분의 퍼즐을 만드는 것이 상당히 쉽다는 것을 알게 될 것입니다.

이러한 퍼즐의 대부분은 다양한 수준의 난이도를 가지고 있으며, 다음 장에는 이러한 수준을 만드는 방법에 대한 많은 제안과 예가 있습니다. 항상 가장 쉬운 퍼즐부터 시작하세요. 너무 어려운 퍼즐로 인해 좌절하고 낙담하고 과도하게 도전받는 것보다 약간 너무 쉬운 퍼즐로 아이가 성공, 이해, 재미를 경험하게 하는 것이 훨씬 낫습니다. 아이가 수학 활동에 대한 자신감과 열정을 키우고 나면 더 큰 도전 과제를 천천히 통합해야 할 때입니다. 또한 모든 퍼즐이 모든 사람에게 재미있는 것은 아니므로 좋아하지 않는 것처럼 보이는 퍼즐과 활동을 푸시하지 마십시오.

이것은 다음 페이지에서 찾을 수 있는 내용입니다.

- **5장 — 인수와 건너 뛰기**
- **5장 — 에라토스테네스의 체**
- **5장 — 지렛대와 모빌**
- **5장 — 상자 나누기**
- **5장 — 문자 대체 퍼즐**
- **5장 — 조사 — 모양 가지고 놀기**
- **5장 — 곱 게임**
- **5장 — 제한된 계산기**
- **5장 — 두 배 또는 제자리**

5장 — 인수와 건너 뛰기

— 소개 —

20과 같이 임의의 숫자로 시작합니다. 아이가 먼저 갈 것인지 아니면 두 번째로 갈 것인지 결정하게 하세요. 자신의 차례 동안 플레이어는 숫자에서 현재 숫자의 제수를 뺄 수 있습니다. 강제로 0이 된 플레이어는 패배합니다.

— 분석 —

평소와 같이 이 게임에 대해 배우기 위한 좋은 전략은 게임의 더 간단한 보기를 살펴보는 것입니다. 이 경우에는 매우 작은 숫자부터 시작해야 합니다. 당신의 차례이고 이 숫자들 각각에 직면하면 다음과 같은 일이 발생합니다: 1 - 패배, 2 - 승리, 3 - 패배, 4 - 승리, 5 - 패배, 6 - 승리, 7 패배, 8 이기다. 이제 패턴이 명확해집니다. 당신의 움직임이고 홀수라면 패배하게 될 것입니다. 당신이 짝수라면, 당신은 이길 것입니다.

승리 전략을 찾는 것은 큰 단계이지만 더 깊이 들어가 보겠습니다. 이것이 작동하는 이유는 무엇입니까? 이 상황을 만드는 홀수와 짝수의 속성은 무엇입니까? 이 질문을 아이 앞에 두고 그것에 대해 생각하고 실험할 수 있는 많은 시간을 주십시오. 서두르지 마세요. 질문과 씨름하는 이 과정은 매우 중요하며 단락되지 않아야 합니다.

작은 숫자로 몇 가지 실험을 해보면 무슨 일이 일어나고 있는지 빠르게 알 수 있습니다. 홀수인 경우 제수는 모두 홀수이므로 제수를 빼면 결과가 짝수가 됩니다. 결과적으로, 한 차례의 홀수는 항상 다음 차례의 짝수로 이어집니다. 짝수는 약수에 대해 항상 홀수와 짝수를 모두 갖습니다. 따라서 상황은 완전히 동일하지 않습니다. 그러나 짝수인 경우 상대방에게 홀수를 주는 것이 목표이며 이를 수행하는 쉬운 방법이 있습니다. 제수 1을 선택하고 빼십시오!

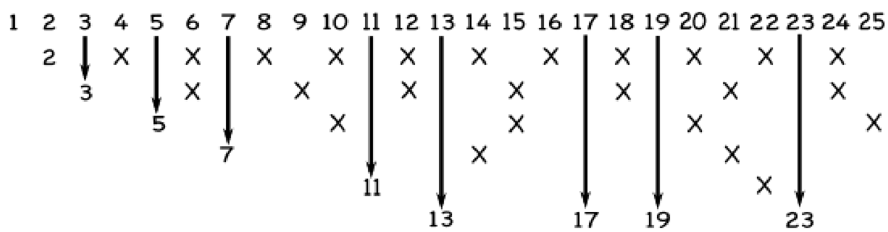
5장 — 에라토스테네스의 체

— 소개 —

1에서 25까지의 숫자 줄로 시작하거나 공간과 인내심이 허락한다면 더 큰 범위로 시작하십시오.

아래에 숫자 2를 쓰십시오. 이 2가 있는 줄에서도 X를 2의 각 배수 아래에 놓습니다.

이제 그 아래에 X가 없는 첫 번째 숫자(이 경우 3)를 끌어서 다음 줄에 넣습니다. 3을 쓰고 모든 배수에 대해 해당 행에 X를 표시하십시오. 이런 식으로 계속하십시오. 결국 모든 소수를 끌어내렸습니다. 1은 단위이지 소수가 아닌것을 기억하세요!



— 분석 —

이 간단한 과정을 통해 소수에 대한 몇 가지 흥미로운 사실을 알 수 있습니다. 아이가 이러한 질문 중 일부를 생각해낼 수 있는지 확인하십시오. 그러나 자연스럽게 발생하지 않는 경우 다음과 같은 질문을 해야 합니다.

1) 아래로 떨어지는 숫자가 왜 소수입니까?

합성 숫자가 있다고 가정합니다. 우리는 이 숫자 아래에 X가 있음을 보여주고 싶습니다. 합성이므로 1과 그 숫자 사이의 어떤 숫자 n으로 나눌 수 있습니다. n이 소수이면 합성 수는 n이 이전 소수이기 때문에 그 아래에 X가 있습니다. n이 소수가 아닌 경우 이전 소수의 X가 아래에 있으므로 이를 p라고 합니다. 이제 p는 n을 균등하게 나누고 n은 새 숫자를 균등하게 나눔으로 p는 새 숫자를 나누어야 합니다. 결과적으로, p의 배수를 표시할 때 X는 우리의 새 숫자 아래에 놓였을 것입니다.

2) 소수의 배수에 대해 X를 배치할 때 이전 소수의 X가 이미 있는 숫자가 있습니다. 언제 그런 일이 일어나고 언제 일어나지 않습니까?

위의 체에서 5의 배수를 살펴보겠습니다. 배수 5 x 2, 5 x 3 및 5 x 4는 이미 지워져 있습니다. 5 x 5만 새 제품입니다. 이것은 5 x 2, 5 x 3 및 5 x 4가 모두 이전 소수인 2와 3의 배수이기 때문에 발생합니다. X를 새로운 위치에 배치하려면 5 이상인 소인수만 있는 숫자로 5를 곱해야 합니다. 그 모든 것을 추적하는 것이 약간 지루하기 때문에 일부 사람들은 홀수 배수만 지우고 그대로 두는 것입니다.

3) 이 체의 경우 행에 유용한 새 X가 있는 마지막 소수는 무엇입니까?

이 체에서 유용한 X가 있는 소수는 2, 3, 5입니다. 7과 11의 배수는 모두 오래된 X입니다. 마지막 질문에 대한 답을 보면 여기에 답이 있습니다. 새로운 X를 얻는 유일한 방법은 소수에 자기보다 크거나 같은 소수를 곱하는 것입니다. 7 x 7 > 25인 7과 같은 소수에 도달하면 확인할 필요가 없습니다. 따라서 제곱이 마지막 숫자보다 작거나 같은 소수만 확인하면 됩니다.

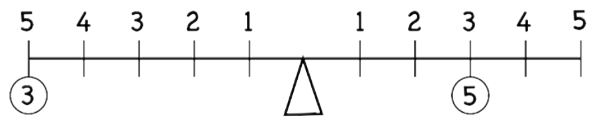
4) 53과 같은 숫자가 주어졌을 때 소수인지 확인하려면 어떤 소수로 나누어야 합니까?

마지막 질문에 대한 답에서 제곱이 53보다 작거나 같은 소수만 확인하면 됩니다. 이러한 소수는 2, 3, 5, 7입니다. 이 중 어느 것도 53을 균등하게 나누지 않으므로 53이 소수여야 합니다!

5장 — 지렛대와 모빌

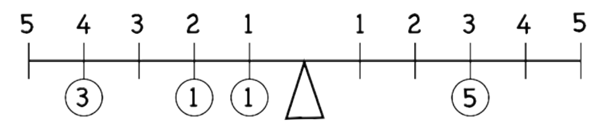
— 지렛대 —

지렛대 원리는 질량에 의해 지렛대의 한쪽 면에 가해지는 힘은 질량 곱하기 중심점인 받침점으로부터의 거리와 같다는 것입니다.



위의 지렛대에서 왼쪽의 3은 받침점에서 5의 거리이므로 힘은 3 x 5 = 15입니다. 오른쪽의 5는 받침점에서 3의 거리이므로 힘은 5입니다. x 3 = 15. 이 지렛대는 균형을 이루고 있습니다.

한쪽에 하나 이상의 무게가 있으면 힘이 합산됩니다.



이 지렛대에는 왼쪽에 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15, 오른쪽에 5 x 3 = 15가 있습니다. 그래서 균형을 이루고 있습니다.

우리는 이러한 문제를 정수만 사용하도록 제한할 것입니다. 동일한 지점에 여러 가중치를 적용할 수 있는지 여부를 결정할 수 있습니다. 다음 논의에서 여러 가중치를 수행하는 것이 괜찮다고 가정하겠습니다.

— 지렛대 퍼즐 —

받침의 반대쪽에 놓을 3단위 추와 5단위 추가 있습니다. 그것들은 어디에 균형을 맞춰야 합니까? 이에 대한 답은 거리 5와 3이 될 수 있지만 10과 6, 또는 15와 9와 같이 더 큰 답도 될 수 있습니다. 아이가 생각해낸 것이 무엇이든 열린 마음으로 토론하세요.

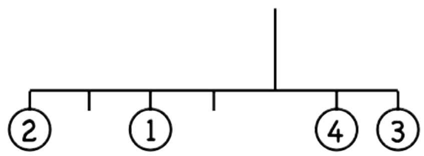
지렛대 한쪽에 3단위와 5단위 추를 놓을 경우 반대쪽에 어떤 추를 어느 거리에 놓을 수 있습니까? 이 질문은 4장의 끝부분에 있는 “숫자 세계’ 페이지의 질문을 계속합니다. 이전과 마찬가지로 다양한 가중치 조합을 탐색합니다. 3과 5가 4와 5, 4와 9, 6과 9로 바뀌면 어떻게 될까요?

3단위와 5단위 추를 받침점의 반대쪽에 놓으면 이 마지막 문제가 어떻게 변합니까? 이제 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1을 사용하여 1단위 무게를 쉽게 잴 수 있습니다. 이 방법으로 칭량할 수 있는 다른 무게는 무엇입니까?

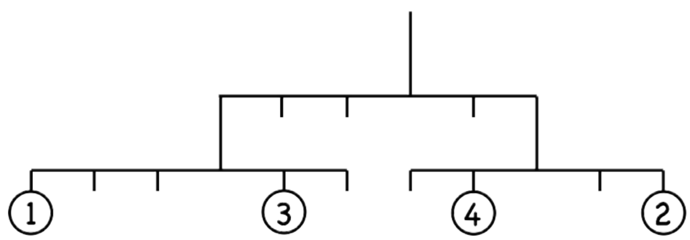
— 모빌 —

몇 가지 연결 지점이 있는 모빌에 대한 몇 가지 가중치와 디자인이 제공됩니다. 문제는 모빌이 모든 팔을 따라 균형을 잡을 수 있도록 부착 지점당 최대 하나의 무게를 두는 것입니다. 이러한 문제를 위해 모빌을 만드는 줄이 무중력이라고 가정합니다. 모빌의 각 팔은 균형이 필요한 지렛대이므로 이 퍼즐은 지렛대 균형의 확장입니다. 시작하기 전에 해당 퍼즐을 연습하세요.

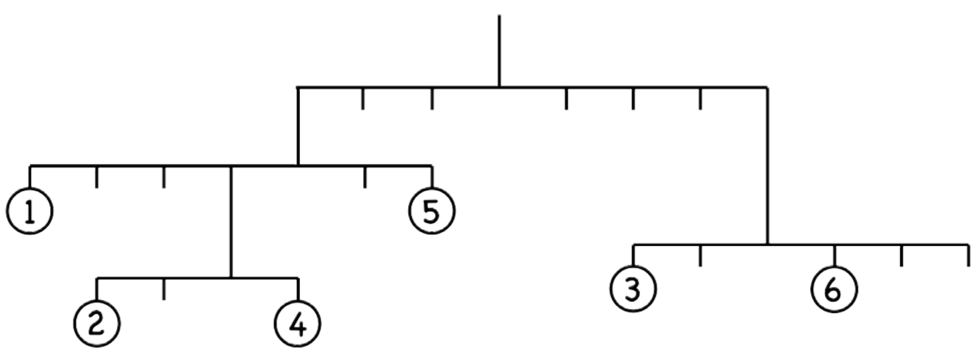
공중에 떠 있는 지렛대에 불과한 가장 단순한 모빌부터 시작하세요. 다음은 균형을 맞추기 위해 이 모빌에 1에서 4까지의 가중치를 두는 해결방법입니다. 이것은 매달린 지점에 지렛대가 있는 지렛대로 작동합니다. 이 모빌의 경우 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2입니다.



모빌에 하나 이상의 등급이 있는 경우 각 등급의 개별 팔은 지렛대로 균형을 잡아야 합니다. 이 다음 모빌에서는 1 x 3 = 3 x 1 및 4 x 1 = 2 x 2이기 때문에 두 개의 밑에 팔이 균형을 이룹니다. 다음 윗 등급을 위해서는 그 아래에 있는 가중치를 더하기만 하면 됩니다. 예를 들어, 왼쪽의 무게는 1 + 3 = 4입니다. 다음 지렛대에 관한 한, 무게가 아래쪽 팔의 어디에 있는지는 중요하지 않습니다. 따라서 다음 등급의 경우 (1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12이므로 최상위 등급도 균형을 이룹니다.



즐겁게 모빌 퍼즐을 만들어 보세요. 다음은 1부터 6까지의 각 숫자를 사용하여 해볼수 있는 마지막 숫자입니다. 무리하게 각 숫자를 한 번 사용하는 것에 대해 걱정하지 마십시오. 완성된 모든 퍼즐은 재미있을 것입니다. 레벨 확인: 2 x 2 = 4 x 1; 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2; 3 x 2 = 6 x 1; 그리고 (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4.



5장 — 상자 나누기

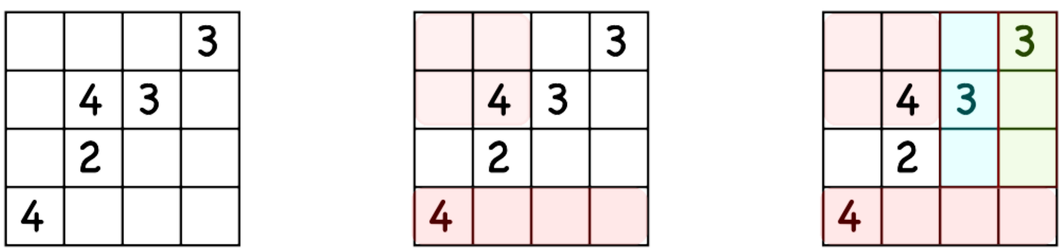
— 소개 —

일부 정사각형에 숫자가 있는 4 x 4 이상의 직사각형은 다음과 같습니다. 더 작은 직사각형으로 나눕니다. 각 숫자는 면적이 해당 숫자인 별도의 직사각형으로 끝나야 합니다.

성인의 경우 이러한 퍼즐을 구성하는 것은 간단합니다. 직사각형을 가져 와서 내부를 직사각형으로 나누고 각 내부 직사각형 내부의 면적에 숫자를 넣은 다음 내부 직사각형의 모든 표시를 제거하십시오. 유일한 까다로운 부분은 퍼즐을 비교적 쉽게 풀 수 있는 위치에 숫자를 넣는 것입니다. 퍼즐이 너무 어려워지면 필요할 때마다 힌트를 줄 수 있습니다.

— 해결 전략 —

다음은 이러한 퍼즐을 간단하게 해결할 수 있는 몇 가지 일반적인 전략입니다. 아이가 퍼즐을 가지고 노는 동안 이러한 규칙을 발견할 수 있도록 최선을 다하십시오. 그들이 생각해 낸 규칙의 목록을 함께 만드십시오.



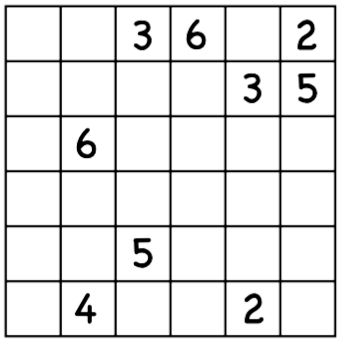
1) 직사각형에 대해 하나 또는 두 개의 방법만 있는 숫자를 보십시오.

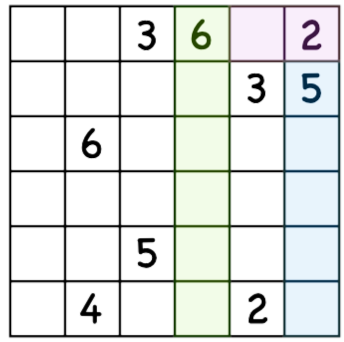
4개 모두 매우 제한적입니다. 각 4는 1 x 4 또는 2 x 2 직사각형 안에만 들어갈 수 있습니다. 위쪽 4는 안쪽으로 감겨져 있으므로 1 x 4 안에 들어갈 수 없습니다. 따라서 왼쪽 상단 모서리에 2 x 2 직사각형이 있어야 합니다. 그러면 사각형이 1 x 4이고 아래쪽을 따라 갈 가능성만 있는 하위 4가 남습니다.

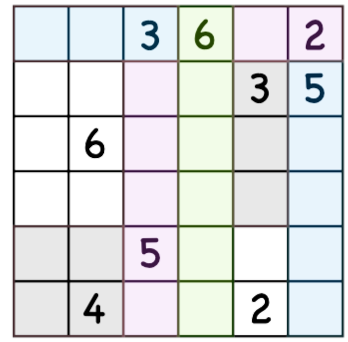
2) 소수를 보세요. 1 x n 직사각형 안에 있어야 합니다.

위 퍼즐의 3은 1 x 3 직사각형 안에 포함되어야 합니다. 오른쪽 상단 모서리에 있는 3은 상단 가장자리 또는 오른쪽을 따라 진행되는 1 x 3 직사각형의 일부만 될 수 있습니다. 왼쪽 상단의 2 x 2 정사각형이 4에 대해 차단되어 상단 가장자리를 따라 1 x 3을 가질 수 없습니다.

하단을 따라 1 x 4는 두 개의 3 중 더 낮은 것이 두 개의 수직 가능성 중 더 놓도록 1 x 3을 합니다.







3) 최대 차원에 가까운 숫자에는 방법이 거의 없는 경우가 많습니다.

다음 퍼즐에서 6과 5를 보세요. 맨 위의 6은 많은 공간이 필요하며 충분한 공간이 있는 유일한 방법은 전체 열을 사용하여 수직으로 똑바로 아래로 내려가는 것입니다. 다른 6은 행이 다른 6의 열에 의해 잘렸기 때문에 1 x 6이 될 수 없습니다. 따라서 하위 6은 2 x 3이어야 하며 아직 확실하지 않습니다.

다른 예로, 이 퍼즐에 8이 있었다면 1 x 8은 맞지 않을 것이므로 2 x 4 직사각형의 일부여야 합니다.

4) 상자 안에 있는 사각형에는 방법이 거의 없습니다.

맨 위의 5개는 상자 안에 있으므로 5개 상자 열에 있는 것만 선택할 수 있습니다. 나머지 5개도 소수이므로 수직 또는 수평으로 가야 합니다. 6의 기둥에 의해 수평으로 잘리므로 3 바로 아래까지 수직으로 올라가야 합니다.

5) 모서리는 종종 매우 제한됩니다.

오른쪽 상단 모서리에 있는 2는 수평으로 가야하므로 쉽게 채울 수 있습니다.

5장 — 문자 대체 퍼즐

— 소개 —

이 장의 앞부분에 있는 몇 장의 누락된 숫자 퍼즐에 익숙해지면 시작할 수 있습니다. 이 퍼즐을 가지고 노는 것. 여기에서 하나 이상의 숫자가 문자로 대체됩니다. 문자에 대한 세 가지 규칙은 다음과 같습니다.

- 주어진 문자는 항상 같은 숫자입니다.
- 맨 왼쪽 숫자는 절대 0이 아닙니다.
- 다른 문자는 다른 숫자여야 합니다.

덧셈 또는 뺄셈 문제를 풀고 하나 이상의 숫자를 바꿔서 이 퍼즐을 만드십시오. 퍼즐은 또한 아이에게 흥미로운 문제 해결 과제를 만들기 위해 만들 수 있습니다. 문자의 값은 퍼즐에서 퍼즐로 넘어가지 않습니다.

— 예제 —

이 첫 번째 예제는 표준 덧셈 또는 뺄셈 문제를 가지고 문자 대체 퍼즐을 만드는 방법을 보여줍니다. 첫 번째 경우는 6을 모두 A로 교체했으며 두 번째 버전에서는 계속해서 2를 B로 교체했습니다.

$$\begin{array}{r}23\\+46\\\hline 69\end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r}23\\+4A\\\hline A9\end{array}\quad\begin{array}{r}B3\\+4A\\\hline A9\end{array}$$

이 예제의 나머지 부분은 특정 상황의 속성을 사용하여 해결할 수 있도록 신중하게 구성되었습니다. 주의해야 할 한 가지 속성은 두 개의 숫자를 더할 때 다음 열에 항상 0 또는 1이라는 것입니다. 따라서 예를 들어 문제 A + A = C4에서 C는 0을 가질수 없기 때문에 1이어야 합니다.

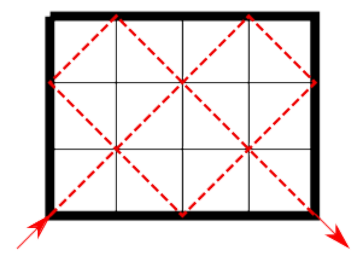
$$\begin{array}{r}B\\+8\\\hline C\end{array}\quad\begin{array}{r}B\\+B\\\hline 8\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\+A\\\hline C4\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\+2\\\hline BC\end{array}\quad\begin{array}{r}D\\+2\\\hline EE\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\+B\\\hline AC\end{array}$$

$$\begin{array}{r}A\\A\\+A\\\hline B2\end{array}\quad\begin{array}{r}C\\C\\+C\\\hline D4\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\A\\+7\\\hline B\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\A\\+B\\\hline B0\end{array}\quad\begin{array}{r}A\\+BB\\\hline A7\end{array}\quad\begin{array}{r}B\\+AB\\\hline BA\end{array}$$

$$\begin{array}{r}BA\\+BB\\\hline CAB\end{array}\quad\begin{array}{r}AD\\+BD\\\hline BCC\end{array}\quad\begin{array}{r}AA\\+BA\\\hline BBC\end{array}\quad\begin{array}{r}AA\\+CB\\\hline BBC\end{array}\quad\begin{array}{r}AA\\+AB\\\hline CAC\end{array}\quad\begin{array}{r}AA\\+AA\\\hline BBC\end{array}$$

5장 — 모양 가지고 놀기

— 튀는 당구 공 — 소개 —



각 모서리에 주머니가 있는 당구대를 상상해 보십시오. 공이 탁자 옆으로 튕겨 나갈 때, 공은 들어온 것과 같은 각도로 튕겨져 나옵니다. 왼쪽 하단 모서리에서 45도 각도로 공을 쏘면 끝은 어디입니까? 답은 테이블의 크기에 따라 다릅니다. 오른쪽 그림은 3 x 4 테이블에서 일어나는 일입니다.

아이에게 탁자 그림을 주고 어느 코너가 먼저 맞을지 그리고 그 코너에 도달하기 전에 얼마나 많은 튕겨져야 할지 예측하도록 아이에게 도전하십시오.

— 튀는 당구 공 — 분석 —

아이가 이것으로 놀게 하는 것으로 시작하고 결과를 발견하는 데 서두르지 마십시오. 앞으로 보게 되겠지만, 이 문제는 젊은이를 위한 몇 가지 정교한 아이디어와 관련이 있습니다. 필요에 따라 한두 가지 질문을 하여 그들의 생각을 좀 더 체계화할 수 있습니다. 어떤 일이 일어날지 알고 있습니다. 먼저 간단한 표를 보고 패턴을 찾으십시오. 이 아이디어가 아이에게 자동으로 적용되면 아이의 남은 생애 동안 도움이 될 것입니다!

가장 간단한 테이블은 1 x n이며 이해하기 쉽습니다. 몇 가지 n 값을 사용하여 패턴이 빠르게 나타납니다. 이와 같은 단순한 결과를 과소평가하기 쉽습니다. 그러나 완전히 이해된 결과는 축하해야 하며 이 결과는 다른 결과로 이어질 것입니다.

<u>결과</u>: 1 x n 테이블: 공은 n-1번 튕깁니다. 공은 n이 짝수이면 오른쪽 하단 모서리에 있고 n이 홀수이면 오른쪽 상단 모서리로 끝납니다.

다음으로 가장 간단한 테이블은 2 x n입니다. 여기에 있는 패턴은 조금 더 복잡합니다. 좋은 기록 보관은 이와 같은 일에서 큰 차이를 만들 수 있습니다. 관찰력 있는 실험자는 2 x 4 테이블이 1 x 2 테이블처럼 작동하고 2 x 6 테이블이 1 x 3처럼 작동한다는 것을 알아차릴 것입니다. 이것은 다음 결과로 빠르게 일반화됩니다.

<u>결과</u>: 2x2xn 테이블은 1xn 테이블처럼 작동합니다.

왜 이런거야? 무슨 일이야? 이것은 아이에게 주입하기 위한 수학적 과정입니다. 패턴을 찾은 다음 패턴을 이해하려고 노력하고, 새로운 이해를 통해 이전 결과를 확장하십시오.

두 차원을 동일한 비율로 확대해도 테이블의 튕겨가는 것은 변경되지 않습니다. 이 작업이 완료되면 테이블은 더 커지지만 기하학적으로는 동일합니다. 기하학 용어로 두 테이블은 "유사"하다고 합니다.

<u>결과</u>: kxm x kxn 테이블은 m x n 테이블과 똑같이 작동합니다.

우리는 작은 단계를 거쳐 여기까지 왔지만 이것은 큰 결과입니다. 이는 먼저 공통 요소를 제거하여 모든 테이블에서 분석을 시작할 수 있음을 의미합니다.

2 x n 테이블에 대해 중단한 부분을 다시 시작합니다. n이 짝수일 때 어떤 일이 발생하는지 이해하지만 n이 홀수일 때 어떤 일이 발생합니까? n = 1, 3, 5, 7 등인 경우 2 x n은 어떻게 됩니까? 패턴은 금세 보기 쉬워집니다.

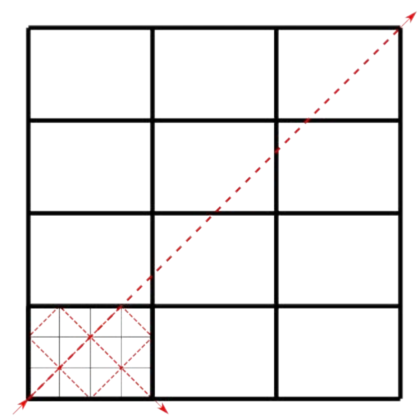
<u>결과</u>: n이 홀수일 때 2 x n 테이블은 n번의 튕겨가는 수를 갖고 왼쪽 상단 모서리에 끝납니다.

많은 진전이 이루어지고 있습니다. 더 많은 예제를 가지고 놀면 더 많은 패턴이 생깁니다.

<u>결과</u>: n이 3의 배수가 아닌 경우 3 x n 테이블은 n+1번의 튕겨가는 수를 가지며 n이 3으로 나눌 때 나머지가 1이면 오른쪽 상단 모서리에서 끝납니다. 3으로 나눌 때 2의 나머지. n이 홀수인 경우 4 x n 테이블은 n + 2개의 튕겨가는 수를 가지며 왼쪽 상단 모서리에서 끝납니다. n이 5의 배수가 아닌 경우 5 x n 테이블은 n+3개의 튕겨가는 수를 가지며 n이 홀수일 때 오른쪽 상단 모서리에 있고 n이 짝수일 때 오른쪽 하단 모서리에서 끝납니다.

이 시점에서 우리는 자료를 살펴보고, 몇 가지 패턴을 보고, 몇 가지 추측을 하고 싶은 생각이 듭니다.

<u>추측</u>: k와 n은 공통적인 인자가 없다고 가정합니다. 그러면 ak x n 테이블은 k + n - 2개의 튕겨지는 수를 갖게 됩니다. k가 짝수이면 왼쪽 상단에서 끝납니다. k가 홀수이고 n이 홀수이면 오른쪽 상단 모서리에서 끝납니다. k가 홀수이고 n이 짝수이면 오른쪽 하단 모서리에서 끝납니다.



우와 - 이 추측이 사실이라면 이 문제를 완전히 해결한 것입니다! 무슨 일이 일어날지 아십니까... 이 추측이 왜 참이어야 하는지 설명할 수 있는지 봅시다(또는 그것이 거짓임을 알아내세요).

이 상황을 이해하는 다른 방법이 있지만 때때로 발생하는 것처럼 이 문제를 훨씬 더 쉽게 이해할 수 있는 것은 새로운 발상입니다.
당신에게는 일어나지 않을 수도 있지만, 당신이 그것을 본 후에는 아마 놀랄 것입니다. 공이 일직선으로 갈 수 있도록 테이블을 펼치는 것이 아이디어! 원래의 3 x 4 테이블을 펼치고 공의 경로를 직선으로 만들면 다음과 같습니다.

이제 그 추측이 사실임을 확인하는 것이 훨씬 쉬워졌습니다. 튕겨나가는 것은 교차 선에 해당합니다. 한 방향으로 교차하는 (k - 1)개와 다른 방향으로 교차하는 (n - 1)개가 있으므로 함께 총 (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2개의 선을 건너야 합니다. 그것이 어느 코너에서 끝나는지 보는 것은 상황이 어떻게 전개되는지 추적하는 문제입니다. 이제 매우 흥미로운 여행을 마쳤습니다.

— 도형으로 영역 채우기 — 소개 —

8 x 8 체스판이 있고 1 x 2 타일 모음이 있다고 가정합니다. 이 1x2 타일 중 32개로 체스판을 정확히 덮는 방법을 찾는 것은 간단합니다.

체스판에서 몇 개의 사각형을 제거하기 시작하고 무슨 일이 일어나는지 봅시다. 체스판의 한 모서리를 제거하면 타일이 항상 짝수의 정사각형을 덮고 이제 덮을 정사각형이 63개가 있기 때문에 더 이상 타일로 체스판을 덮을 수 없다는 것을 즉시 알 수 있습니다. 좋아요, 두 개의 모서리를 제거하여 짝수 개의 남은 정사각형을 만드세요. 이제 덮을 수 있습니까? 답은 제거하는 두 모서리에 따라 다릅니다. 왜요? 더 이상 모서리 제거에 제한을 두지 않는다면 어떻게 될까요?

— 도형으로 영역 채우기 — 분석 —

색칠 아이디어를 나타내기 전에 아이가 이것을 가지고 놀게 하세요. 그들이 작은 판을 가지고 놀다 보면 스스로 규칙을 발견할 수 있으며, 그것이 항상 더 좋습니다.

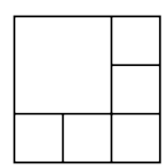
이 질문에 많은 도움이 되는 관찰은 체스판 사각형의 색상을 사용하는 것입니다. 1 x 2 타일을 하나는 흰색으로, 다른 하나는 검정색으로 칠하면 흥미로운 일이 발생하는 것을 볼 수 있습니다. 모든 타일은 각 색상의 정사각형을 덮어야 합니다. k 타일은 2xk 정사각형을 덮을 뿐만 아니라 k개의 흰색 정사각형과 k개의 검은색 정사각형을 덮을 것입니다(각 색상의 동일한 수의 정사각형). 이 아이디어를 사용하면 한 색상의 사각형을 다른 색상보다 더 많이 제거하면 보드를 덮는 것이 불가능하다는 것이 분명해집니다.

아이가 이 질문을 좋아한다면 다른 모양을 사용하여 칠판을 채우는 것으로 시작하십시오. 타일을 1x3 타일로 채우거나 L자 모양의 정사각형 3개로 채우면서 놀아보세요. 이것들로 어떤 패턴과 규칙을 발견합니까? 어떤 다른 모양을 가지고 놀기에 흥미로울까요?

— 정사각형으로 정사각형 채우기 — 소개 —

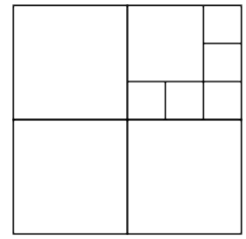
다른 정사각형이 모두 같은 크기일 필요는 없는 다른 정사각형으로 정사각형을 채울 수 있는 방법은 무엇입니까? 그러나 길이는 아무 숫자일 수는 없습니다. 각 정사각형의 한 변 길이는 고정 길이의 정수 배수여야 합니다. 조사할 질문은 다음과 같습니다. 가능한 모든 제곱수는 얼마입니까? 또한 숫자가 가능하다는 것을 알고 있다면 쉽게 설명할 수 있는 방법이 있습니까?

아이가 여러 날 동안 그것을 가지고 놀게 하고 답을 얻기 위해 서두르지 마십시오. 이 조사에 대한 방법을 내는 데는 여러 가지 방법이 있으므로 유연하게 아이의 아이디어를 활용하십시오. 다음은 6이 가능한 방법을 보여주는 도형입니다.



몇 가지 빠른 예를 제시하는 것은 항상 좋은 생각입니다. 쉬운 시작으로 큰 사각형을 같은 크기의 사각형으로 나눕니다. 그로부터 제곱수(1, 4, 9, 16, 25, …)가 모두 작동한다는 것을 알 수 있습니다.

6개의 정사각형 예제를 사용하여 모든 크기의 큰 정사각형 하나를 사용하고 두 면에 1x1 정사각형을 놓을 수 있습니다. 더 큰 정사각형(1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, ...)에 대해 그렇게 하면 1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6(그림 참조), 1 + 7 = 8, 1 + 9 = 10이 됩니다. , 등등. 따라서 4로 시작하는 모든 짝수는 이 방법으로 수행할 수 있습니다.



이것을 빠르게 마무리하는 강력한 방법은 작동하는 도형을 가져와서 사각형 중 하나를 작동하는 다른 도형으로 대체할 수 있다는 것을 확인하는 것입니다. 예를 들어, 4 1 x 1 정사각형으로 채워진 간단한 2 x 2를 가져 와서 1 x 1 정사각형 중 하나를 6 정사각형 예제로 바꾸면 오른쪽에 표시된 도형이 9 개의 정사각형으로 표시됩니다.

하나의 정사각형이 n-제곱 도형으로 대체되기 때문에 정사각형 수의 순 변화는 n-1개를 더하는 것입니다. 그것은 우리가 작동하는 하나의 숫자를 취하고 작동하는 다른 숫자에 그것보다 1이 적은 배수를 더할 수 있음을 의미합니다. 특히, 작동하는 다른 숫자에 4 -1 = 3의 배수를 추가할 수 있습니다. 3을 더하기 쉬운 숫자는 4로 시작하는 모든 짝수입니다. 모두 합치면 숫자 1, 4, 6, 7, 8, 9,… 2, 3, 5는 불가능하다고 자신을 설득하는 것도 쉽습니다.

아이가 해당 질문을 탐색하는 것을 즐긴다면 이 주제에 대한 변형을 탐색하십시오. 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3과 같은 특정 크기의 정사각형만 허용한다고 가정합니다. 또는 2 x 2 및 3 x 3만 허용합니다. 어떤 질문이 흥미로운 결과를 가져오고 어떤 질문이 그다지 흥미롭지 않은지 확인합니다. .

또 다른 방향은 같은 모양의 도형으로 다른 도형을 채우는 것입니다. 예를 들어, 정삼각형(모든 변의 길이가 같은 삼각형)에 대해 동일한 질문을 합니다. 어떤 수치는 이런 식으로 조사하기에 흥미롭고 어떤 수치는 전혀 흥미롭지 않습니다. 어떤 수치입니까?

5장 — 곱 게임

— 소개 —

다음과 같이 작성된 종이를 함께 사용합니다.

첫 번째 플레이어는 토큰을 맨 아래 줄의 1-9 칸에 있는 1에서 9 사이의 숫자로 옮깁니다. 두 번째 플레이어는 맨 아래 줄에 있는 1-9 칸 중 하나에 다른 토큰을 놓고 6 x 6 격자에서 곱을 주장합니다. 그때부터 각 플레이어는 두 토큰 중 하나를 이동하고 곱을 청구하기로 선택합니다(가능한 경우). 연속으로 3칸을 먼저 차지한 플레이어가 승리합니다. 6 x 6 격자의 곱 숫자를 섞어서 아이가 곱을 더 잘 식별할 수 있도록 하십시오.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

이 놀이판은 원하는 만큼 크게 만들 수 있지만 꽤 빨리 커집니다. 다음은 그 아래에 해당하는 더 큰 숫자 범위가 있는 몇 개의 더 큰 판입니다.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

빨간색 별표가 있는 사각형은 "자유" 사각형이며 필요에 따라 양쪽에서 사용할 수 있습니다.

5장 — 제한된 계산기

— 소개 —

심하게 고장난 계산기가 있고 계산기에서 어떤 결과를 산출해야 하는 문제가 있다고 가정해 보겠습니다. 빠른 퍼즐 설명으로 흥미로운 도전 과제를 제공할 수 있는 다양한 시나리오를 생각해낼 수 있습니다. 이 활동은 여유 시간이 있을 때마다 말로 하기가 쉽습니다. 다음은 시작하는 데 도움이 되는 몇 가지 예입니다.

이러한 질문에서 더 깊은 수학이 진행되고 있는 순간이 있지만 대부분은 전적으로 문제를 가지고 노는 재미를 위한 문제입니다.

1a) +, -, x 및 /가 있는 계산기가 있지만 작동하는 숫자 키가 하나뿐인 4가 있다고 가정합니다. 결과 21을 얻을 수 있습니까? 그렇다면 필요한 최소 단계 수는 무엇입니까?

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21은 한 가지 방법이지만 다른 많은 방법이 있습니다. 다른 하나는 4 x (4 + 4/4) + 4/4입니다. 목표는 놀고 탐험을 즐기는 것입니다.

1b) 4를 최대 4번 사용할 수 있다고 가정합니다. 어떤 숫자를 생성할 수 있습니까? 4를 정확히 4번 사용해야 한다고 가정합니다.

아이의 수학 자원이 늘어남에 따라 4개의 4 문제는 재미있는 퍼즐입니다. 이 시점에서 아이의 선택은 매우 제한적이지만 여전히 가지고 노는 것은 매우 재미있습니다. 소수를 나누거나 사용하지 않고 많은 수를 계산하는 것은 특히 어려울 것입니다. 모든 숫자를 순서대로 나열하는 데 신경 쓰지 마십시오. 가능한 한 많은 다른 숫자를 생각해내십시오.

다음은 시작하기 위한 몇 가지 예입니다.

1 = (4/4) x (4/4) = 44 / 44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4 - 4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44 / 4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) 다른 단일 숫자를 가지고 다른 결과를 만들어내면서 놀아보세요.

2a) 계산기가 4 또는 7만 더할 수 있다고 가정합니다. 어떤 숫자를 생성할 수 있습니까?

이것은 우리가 지금까지 여러 번 본 결과입니다. (4 - 1) x (7 - 1)에서 시작하여 4와 7의 배수를 더하면 모든 숫자를 얻을 수 있습니다. 18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7 등.

2b) 4 또는 7이 있지만 더하고 뺄 수 있다고 가정합니다. 어떤 숫자를 생성할 수 있습니까?

이런 식으로 모든 숫자를 생성할 수 있습니다.

2c) 4와 7을 다른 숫자 쌍으로 바꿉니다. 이 쌍은 어떻게 됩니까?

정수론에서는 이를 베조우트의 정리라고 합니다. 결과는 두 숫자의 배수를 결합하여 두 숫자의 최대 공약수의 배수를 생성할 수 있다고 말합니다.

3) 키가 1개만 있고 더하거나 두 배로 늘릴 수만 있다고 가정합니다. 예를 들어, 2 x (2 x 1) + 1은 5입니다. 다른 어떤 숫자를 만들 수 있습니까?

이것은 변장된 이진수에 대한 질문입니다. 아이가 이것을 깨닫거나 이해하는 것은 중요하지 않습니다. 그것은 단지 가지고 노는 것입니다. 모든 숫자는 이진법으로 쓸 수 있으므로 2배를 더하고 1을 더하면 모든 숫자를 얻을 수 있습니다. 예를 들어 21은 16 + 4 + 1입니다. 따라서 21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

5장 — 두 배 또는 제자리

— 서론 —

플레이어는 20보다 크고 120보다 크지 않은 5개의 고유한 숫자를 비밀리에 선택하여 게임을 시작합니다. 그들을 참조하십시오. 숫자 카드나 다른 장치를 사용하여 1에서 20까지의 임의의 숫자가 생성됩니다. 그 숫자는 누군가의 숫자가 처음으로 적중되거나 숫자가 120보다 커질 때까지 반복적으로 두 배가 됩니다. 다섯 개의 숫자를 모두 맞추는 첫 번째 플레이어가 승자가 됩니다.

— 분석 —

질문은 다음과 같습니다. 고를 수 있는 가장 좋은 5가지 숫자는 무엇입니까? 다음은 생각해 볼 몇 가지 아이디어입니다.

규칙: 항상 1에서 20 사이의 수의 2배인 수를 선택하십시오. 23 또는 46과 같은 수를 선택하면 절대 칠 수 없으며 반드시 지는 것입니다.

규칙: 선택할 수 있었지만 선택하지 않은 다른 숫자의 두 배인 숫자는 절대 선택하지 마십시오.

44를 선택했다면 대신 22를 선택하지 않겠습니까? 다른 사람이 22를 선택하면 차례를 놓칩니다.

추가 분석: 1에서 20까지의 숫자가 똑같이 선택될 가능성이 있습니다. 그러나 9는 18로 이어지기 때문에 18은 11보다 시작점일 가능성이 두 배입니다.: 서로 다른 시작을 얻을 수있는 방법을 결합 할 경우, 시작 포인트는 다음과 같은 확률을 가지고 있습니다.

11 - 1/20 (11에서)

12 - 3/20 (3, 6, 12에서)

13 - 1/20 - (13에서)

14 - 2/20 (7 과 14에서)

15 - 1/20 (15에서)

16 - 5/20 (1, 2, 4, 8 과 16에서)

17 - 1/20 (17에서)

18 - 2 /20 (9 와 18에서)

19 - 1/20 (19에서)

20 - 3/20 (5, 10 과 20에서)

분명히 사용하기에 가장 좋은 숫자는 16, 12 및 20의 배수입니다. 간단한 전략 32, 64, 24, 48, 40이라는 5개의 숫자를 사용하는 것입니다. 이 숫자가 항상 이기는 것은 아니지만 시간이 지남에 따라 매우 잘 작동할 것입니다.