



# Kapitel 4 Bonusmateriale

## — Introduktion —

Er du en, der ønsker, at der var flere eksempler, diskussioner og kommentarer i de bevidst korte beskrivelser af lektionerne? Hvis ja, er du kommet til det rigtige sted! Denne fil indeholder bonusmateriale til nogle af aktiviteterne fra kapitel 4.

For gåder er der givet mange eksempler på løste gåder, sammen med yderligere kommentarer til, hvordan man laver dem. Programmet Early Family Math er baseret på ideen om, at tidlig matematik er noget, en familie bør lave sammen, og at lave puslespil, som dit barn kan lave sammen med dig, er en vigtig del af den proces. Når du har fået styr på hvert puslespil, bør du opdage, at de fleste, hvis ikke alle, gåderne er ret nemme for dig at lave.

Mange af disse gåder har forskellige sværhedsgrader, og der er mange forslag og eksempler på de kommende sider til, hvordan man opretter disse niveauer. Start altid med de nemmeste gåder. Det er langt bedre at få dit barn til at opleve succes, forståelse og sjov med gåder, der er lidt for nemme, end at blive frustreret, modløs og over udfordret af gåder, der er for svære. Når først dit barn opbygger selvtillid og entusiasme for en matematikaktivitet, er det tid til langsomt at inkorporere større udfordringer. Det er heller ikke alle gåder, der vil være sjove for alle, så lad være med at skubbe gåder og aktiviteter, der bare ikke ser ud til at hænge sammen.

Dette er, hvad du finder på de følgende sider:

- **Kapitel 4 – Vedlagte summer**
- **Kapitel 4 – Øhop Kompensation**
- **Kapitel 4 – Difftrekanter og SumtrekanterØhopning**
- **Kapitel 4 – Spring over tælling**
- **Kapitel 4 – Reparer det**
- **Kapitel 4 – Øhopning efter én og Tiere**
- **Kapitel 4 – Solitaire Shape-puslespil**
- **Kapitel 4 – Sumkvadrat**
- **Kapitel 4 – Tilføjelsespyramide**
- **Kapitel 4 – Undersøgelser**

---

## — Juridiske ting —

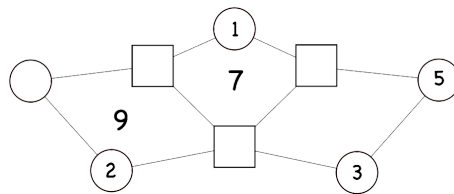
Hver familie bør have mulighed for at lære og nyde matematik sammen. Til det formål er Early Family Math en samling af materialer, som familier og undervisere frit kan redigere, oversætte, kopiere og distribuere, uden at spørge om tilladelse, kun til ikke-kommerciel brug.

© Copyright Early Family Math - Chris Wright 2021 v. 1.0 Creative Commons: Attribution-NonCommercial 4.0 International License

## Kapitel 4 — Vedlagte summer

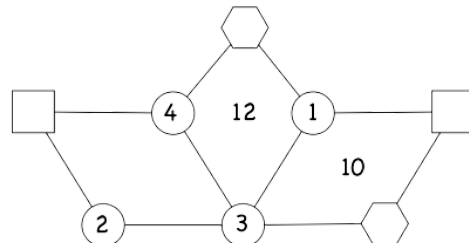
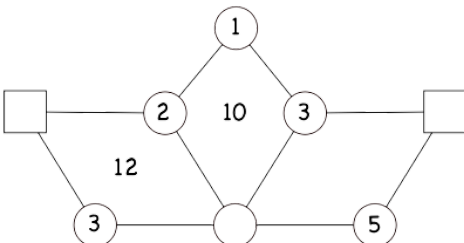
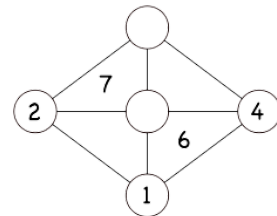
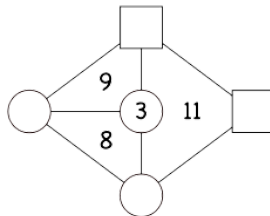
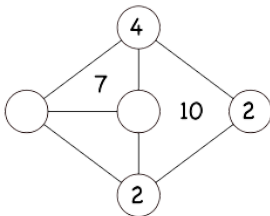
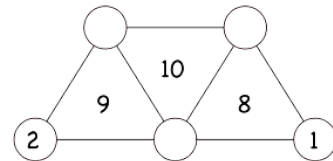
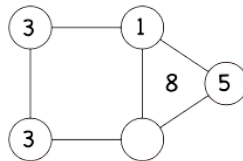
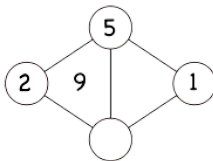
Disse puslespil har former forbundet med linjer. Hvert lukket område har et tal, der er summen af de former, der grænser op til det. I lighed med Shape Sums-puslespil kan cirkler have enhver værdi, og værdien for en ikke-cirkulær form skal være den samme som enhver anden form af samme type. For eksempel skal alle kvadrater have samme værdi, og alle sekskanter vil have samme værdi. Du kan eventuelt tilføje reglen om, at forskellige ikke-cirkulære former skal have forskellige værdier - for eksempel at firkanter og sekskanter skal have forskellige værdier.

Puslespillet for dit barn er at finde ud af tallene i de former og områder, der ikke er leveret.



Lav disse gåder ved at lave et diagram af cirkler og måske nogle andre former. Dernæst skal du udfylde alle figurerne med tal og udfylde de afgrænsede områder med summen af figurerne, der omgiver dem. Fjern endelig nogle af tallene.

Som med Shape Sums-puslespil i kapitel 3, start med simple gåder, hvor der kun mangler et eller to tal, og gå langsomt videre til gåder, hvor der mangler flere tal, mere lukkede områder ved siden af hinanden og mere brug af værdier i ikke-cirkulære områder.



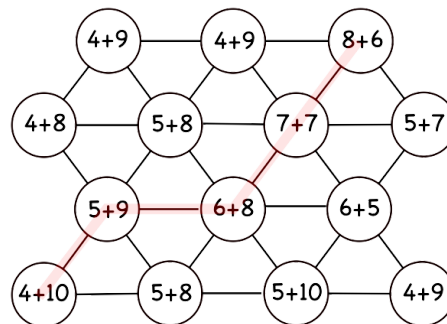
# Kapitel 4 — Øhop — Kompensation

Brug af kompensation for addition er en måde at gøre additions problemer meget nemmere. Ideen er at tage et beløb væk fra et af tallene, der tilføjes, og give det til det andet andet tal – resultatet forbliver det samme, men et af tallene bliver lettere at arbejde med.

For eksempel, når du tilføjer  $7 + 8$ , hvis du tager 2 væk fra 7 og giver det til 8'eren, bliver problemet  $5 + 10$ . Alternativt, hvis du tager 3 væk fra 8'eren og giver det til 7'eren, er problemet bliver  $10 + 5$ . Hver gang du kan gøre et af tallene til et multiplum af 10, vil du have et meget enklere problem.

Disse puslespil giver øvelse i at skabe nye problemer ved hjælp af kompensation. Udfordringen er at finde en sti, der forbinder alle øerne med det samme svar. Det er kun lovligt at forbinde to øer, hvis deres problemtal afviger med 1. Kun nogle af øerne vil være på stien.

Lav disse gåder ved at starte med omkring ti øer med nogle forbindelser. Identificer en sti fra den ene kant af øerne til den anden. Langs den vej, læg problemer, der adskiller sig fra hinanden med én - start måske med et problem, der involverer at tilføje 10, og lav så variationer på det. På øerne tæt på stien, læg problemer med små ændringer, der har forskellige svar.

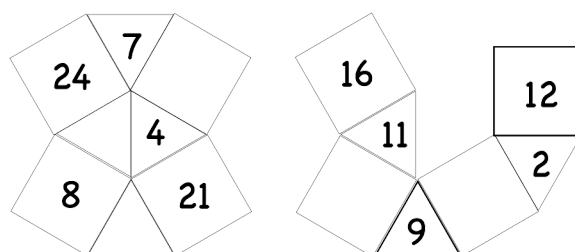


Der er virkelig lidt at gøre for at variere hårdheden af disse gåder. At indføre falske stier vil sandsynligvis føre til forvirring frem for udfordring, og det er derfor generelt en dårlig idé.

# Kapitel 4 — DiffTriangles og SumTriangles

## — DiffTriangles —

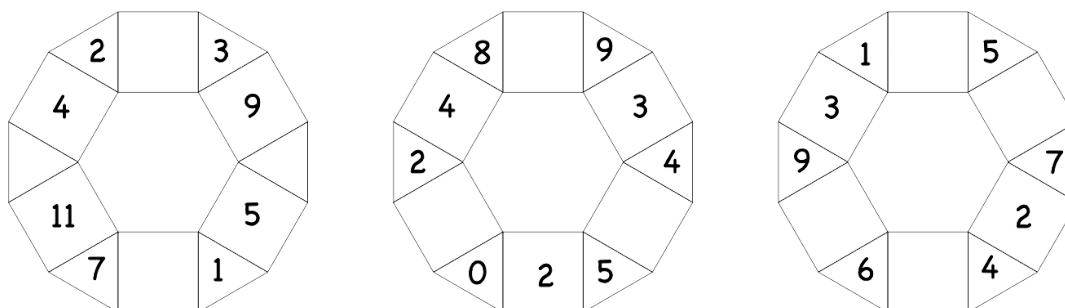
DiffTriangles-puslespil har trekanter og firkanter, der deler sider. En trekant har altid præcis to firkanter på siderne, og den resterende side har enten en trekant eller er tom. En trekants tal er forskellen mellem de to tilstødende firkanter. Udfordringen er at levere de manglende tal.



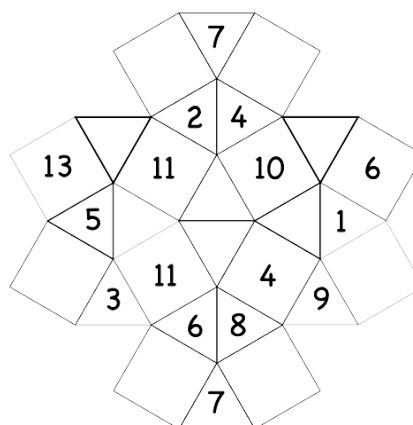
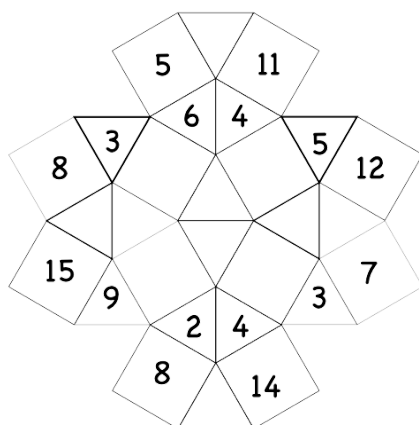
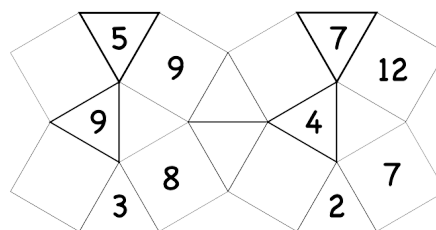
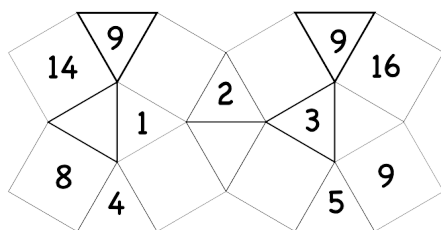
**Konstruere puslespil:** Det er nemt at lave puslespil uden sløjfer. Tegn en vekslende sekvens af firkanter og trekanter, indsæt tal, der starter i den ene ende, og arbejd dig så til den fjerne ende. Når du er færdig, fjern nogle af tallene. At lave puslespil med loops eller mere komplicerede interaktioner er vanskeligere; indsatsen betaler sig dog med nogle udfordrende gåder!

Når dit barn bliver meget fortrolig med disse, vil de måske tage en tur med at lave deres egne gåder. De skal have det sjovt og lære en masse ved at finde ud af, hvordan tallene passer sammen.

**Strategier til løsning:** De steder, du skal gøre først, er trekanter mellem to udfyldte firkanter. Et andet let tilfælde er en firkant ved siden af en fyldt trekant, der har en mindre fyldt firkant ved siden af - i dette tilfælde, fordi vi ikke arbejder med negative tal, er der kun et valg til at udfylde den tomme firkant. Det mest almindelige tilfælde er et kvadrat, der har to mulige værdier, der kigger i den ene retning, og to andre muligheder, der kigger i den anden retning - der er normalt kun ét tal, der overlapper i disse muligheder.

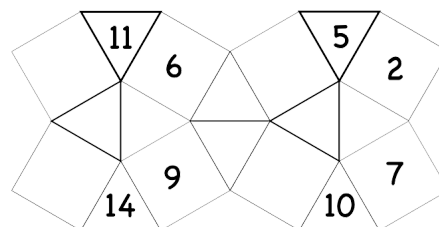
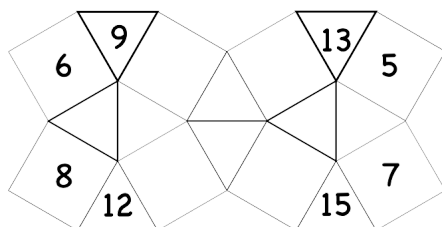
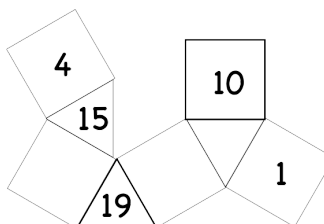
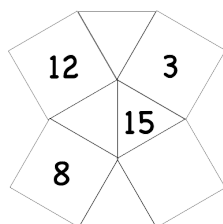


Her er nogle eksempler med mange forbindelser.



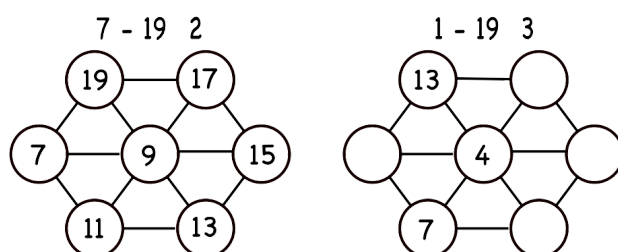
### — SumTriangles —

SumTriangles-puslespil er ligesom DiffTriangles, kun de bruger addition i stedet for subtraktion. Værdien af en trekant er summen af dens to eller tre kvadratiske naboer. Lav disse gåder ved hjælp af metoder, der ligner DiffTriangles. SumTriangles-gåder er typisk nemmere at løse end DiffTriangles.



# Kapitel 4 – Øhop – Spring over tælling

Disse puslespil har øer (cirkler) forbundet med broer (linjer). I denne version af Island Hopping laves forbindelserne ved at springe over. Nogle af øerne har tal skrevet på dem, og nogle vil starte tomt. Over puslespillet er startnummeret, slutnummeret og oversprings mængden. Udfordringen er at udfylde de manglende tal og finde stien. Du kan også placere tallene og blanks på stykker papir på gulvet for at lave et stepping-puslespil.

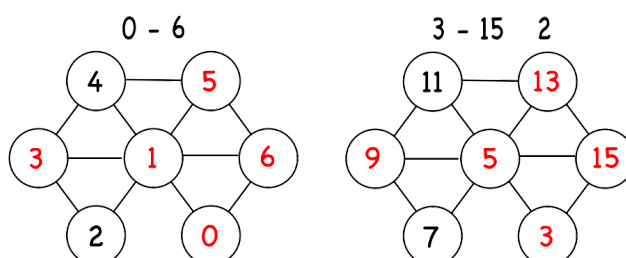


Som med Spring Counting-aktiviteten skal du lave puslespil for at øve dig fremad eller baglæns ved at starte med en række tal, ikke kun tal, der er et multiplum af oversprings mængden.

Oprettelse af disse gåder er det samme som at skabe øhopping - tælle-puslespil fra begyndelsen af kapitel 2. Lav øerne først, udfyld numrene, forbind disse øer i den rigtige rækkefølge, og tilføj derefter nogle yderligere forbindelser for at hjælpe med at lave en puslespil ud af det. I den version, du giver dit barn, skal du fjerne nogle tal, så der er nok af tallene, så det stadig kan finde ud af.

Du kan gense de puslespilskonstruktionsstrategier, der er beskrevet i bonusmaterialet til kapitel 2 for Island Hopping - Counting. Desuden, hvis du stadig har nogle af disse gåder, er det meget nemt at konvertere et af disse gåder til et af disse. Tag følgende puslespil fra kapitel 2. Det involverer at tælle fra 0 til 6. De røde tal er dem, der normalt ville blive udeladt, når puslespillet gives til dit barn. For at konvertere det til et puslespil, der starter ved 3 og springe tæller over med 2, skal du blot gange alle tallene med 2 og derefter lægge 3 til dem, som i tabellen nedenfor. Herefter skal du erstatte de originale numre med de nye (selvfølgelig udelad de røde).

	0	1	2	3	4	5	6
Multi. med 2	0	2	4	6	8	10	12
Tilføj 3	3	5	7	9	11	13	15



# Kapitel 4 — Løs det

Start med et 4 gange 4 gitter af tal med en målsum. Udfordringen er at finde poster, der skal fjernes, så summen af de resterende tal i hver række og kolonne er målet. En alternativ version bruger individuelle målsummer for hver række og kolonne.

Lav disse gåder ved at indsætte par eller tripler af tal, der summerer til målsummen. Udfyld derefter de resterende felter med lokkenumre. Du kan gøre disse vanskeligere ved at have alternative par eller tripler af tal, der delvist virker. Hvis dit barn nyder disse, men finder dem for nemme, kan du altid lave større, der er 4 gange 5, 5 gange 5 eller endnu større.

Røde stjerner er tilføjet her for at vise, hvilke poster der ville blive fjernet for at få gåderne til at fungere.

8				9				10				11			
6	3	5	2	7	4	5	2	3	3	6	4	8	3	5	4
2	1	4	5	2	1	4	6	7	1	2	6	1	1	4	7
3	4	1	3	3	4	4	1	4	6	1	4	3	8	1	3
6	4	2	5	6	4	5	3	6	4	8	2	7	5	7	4

Her er to puslespil, der bruger individuelle målsummer for rækkerne og kolonnerne.

6	3	7	8	16	0	6	5	2	8
2	1	4	5	9	7	8	5	4	12
3	4	7	3	10	2	7	1	4	9
5	6	3	5	11	3	1	9	8	17
11	9	18	8		9	13	14	12	

## Kapitel 4 — Øhop med enere og tiere

Et rektangulært gitter af tal er givet med nogle af tallene udfyldt. Udfordringen er at udfylde de resterende tal, så to numre, der deler en side, kun adskiller sig på et enkelt sted, og forskellen på cifrene på det sted er 1 (inklusive at gå mellem 0 og 9). Intet nummer må bruges mere end én gang i hele gitteret. Henvisning til et 100-diagram kan være nyttigt for begyndende løsere.

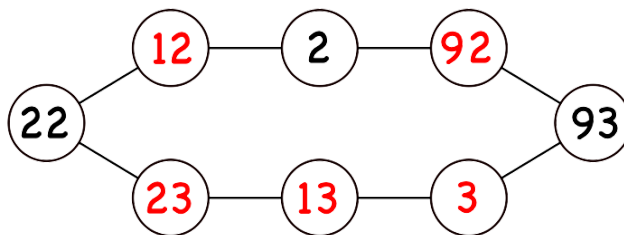
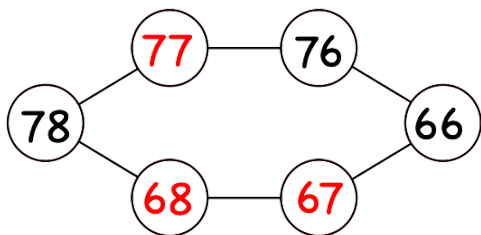
Lav dette puslespil ved at tage et tomt gitter og udfylde det med tal, uden at et tal gentages. Fjern derefter nogle af tallene, og sørg for, at det ikke er for svært for dit barn. I disse eksempler er de røde tal de manglende.

57	67	66	56
5	4	94	95

33	23	13
32	22	12

Ved kun at bruge et- og to-cifrede tal, er der ikke en masse trickiness, der kan indføres. Men de er en god øvelse til at tænke på stedsværdis. En rynke, der kan overraske dit barn, er overgange såsom 95 til 5 til 15 eller 11 til 10 til 0 til 9 - de er måske ikke klar over, at der er et 0 i tiere-pladsen for enkeltcifrede tal, og de kan blive overrasket med 0 og 9 tilsluttes.

Gitter er en naturlig måde at præsentere disse problemer på. Puslespillene kan dog også repræsenteres på samme måde som andre Island Hopping-puslespil ved hjælp af cirkler, og denne repræsentation giver mulighed for en vis ekstra frihed til at skabe puslespil.





# Kapitel 4 — Solitaire Shape Puslespil

## — Magiske trekanter —

Lav en trekant af seks cirkler med tre cirkler på en side. I cirklerne skal du bruge hvert af tallene fra 1 til 6 én gang, så hver side af trekanten har samme sum. Dette indebærer to udfordringer - at finde ud af, hvilke beløb der vil fungere og derefter finde ud af, hvordan man får disse summer. Det er bedre at lade dit barn lege med dette for at finde ud af, hvilke summer der er mulige, men hvis frustrationen vinder frem, er de mulige summer 9, 10, 11 og 12.

Hvis dit barn nyder at finde ud af dette, kan dette gøres for også større trekanter. For en trekant med ni cirkler med fire cirkler på en side er de mulige summer 17, 19, 20, 21 og 23.

Som med så mange af gåderne for denne aldersgruppe, er hovedårsagen til at få dit barn til at lege med dette er at tilskynde til at have det sjovt med at udforske, hvordan tal interagerer med hinanden, og at øve talfakta. De har endnu ikke de matematiske eller ræsonnerende færdigheder til at være systematiske med deres udforskning. Disse gåder kan dog udforskes dybere, og her er nogle ideer til at grave i, hvis du eller et ældre barn er interesseret.

Lad SUM repræsentere summen af den ene side af trekanten. Hvis du lægger de tre sider af trekanten sammen, bliver den samlede sum  $3 \times \text{SUM}$ . Summen af de tre sider vil dog også være summen af alle tallene plus en ekstra kopi for hvert hjørne af trekanten. Lad C-SUM være summen af værdierne i de tre hjørner. Vi ender med den sammenhæng, at  $3 \times \text{SUM} = (\text{Total af alle tallene}) + \text{C-SUM}$ .

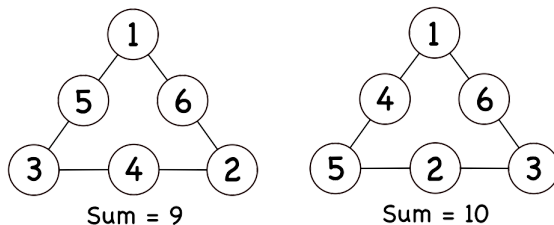
**6 cirkler puslespil.** Anvend dette på trekanten med seks cirkler. Summen af alle tallene er summen af tallene fra et til seks, hvilket er 21. Så ligningen bliver  $3 \times \text{SUM} = 21 + \text{C-SUM}$ . Den mindste C-SUM kan være  $1 + 2 + 3 = 6$ , og den største den kan være er  $4 + 5 + 6 = 15$ . Så  $3 \times \text{SUM}$  er mellem  $21 + 6 = 27$  og  $21 + 15 = 36$ . Dette tvinger SUM til at være 9, 10, 11, 12. Bemærk også at  $\text{C-SUM} = 3 \times \text{SUM} - 21$ , hvilket er praktisk til at finde hjørnerne.

En anden ting at bemærke er symmetrien af de mulige værdier. Det, der forårsager denne symmetri, er, at for hver løsning er der en anden løsning skabt ved at trække alle tallene fra 7 (eller fra 10 for ni-cirkel-puslespillet). En lille udregning vil vise, at denne symmetri tager et puslespil med sum SUM og skaber et nyt med sum  $(21 - \text{SUM})$  (eller  $40 - \text{SUM}$  for ni cirklers puslespil).

Den sidste ting at bemærke, før vi graver ind med faktiske tal, er, at for enhver løsning for de tre hjørner, kan vi antage, at de er i stigende rækkefølge, der går rundt med uret, med det mindste tal øverst. Hvis de ikke er i den konfiguration til at begynde med, kan du rotere eller vende diagrammet, indtil de er det.

Alle disse observationer sparer en enorm mængde arbejde. Vi skal kun se på SUM lig med 9 og 10, og vi skal kun have hjørnerne i stigende rækkefølge. Hvis SUM er 9, så er  $\text{C-SUM} = 3 \times 9 - 21 = 6$ , så trioen er 1, 2 og 3. Hvis SUM er 10, så er  $a + b + c = 3 \times 10 - 21 = 9$ . Dette efterlader to muligheder - enten hjørneværdier på 1, 2 og 6 eller 1, 3 og 5. En hurtig prøvetid udelukker 1, 2 og 6 som en mulighed.

Efter meget arbejde har vi løsninger på, at SUM er 9 og 10 for seks-cirkepuslespillet. Husk, at du kan få løsninger til, at SUM er 11 og 12 ved at trække alle indtastninger fra



**7.9 cirkel puslespil.** Brug den samme tilgang til puslespillet med 9 cirkler. Summen af tallene fra 1 til 9 er 45. Derfor er  $3 \times \text{SUM} = 45 + \text{C-SUM}$ . Den mindste C-SUM, der kan være, er  $1 + 2 + 3 = 6$ , og den største, den kan være, er  $7 + 8 + 9 = 24$ . Så  $3 \times \text{SUM}$  er mellem  $45 + 6 = 51$  og  $45 + 24 = 69$ , hvilket tvinger SUM til at være mellem 17 og 23. Tager man en løsning og trækker alle indtastninger fra 10 får man følgende SUM-parringer: 17 - 23, 18 - 22, 19 - 21 og 20 - 20. Så løsninger er kun nødvendige for 17, 18, 19 og 20. De tilsvarende værdier for C-SUM er 6, 9, 12 og 15.

SUM = 17 og C-SUM = 6. Hertil skal hjørnerne være 1, 2, 3, og det arbejder.

SUM = 18 og C-SUM = 9. Hertil skal hjørnerne være enten 1, 2, 6 eller 1, 3, 5. Ingen af dem virker.

SUM = 19 og C-SUM = 12. Der er en del muligheder for hjørnerne, men de eneste kombinationer der virker er 1, 4, 7 og 2, 3, 7.

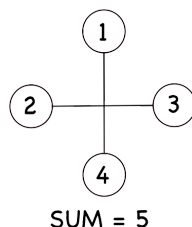
SUM = 20 og C-SUM = 15. Der er for mange kombinationer til hjørnerne, og mange af dem virker. To, der virker, er 1, 5, 9 og 2, 5, 8.

### — Magiske designs —

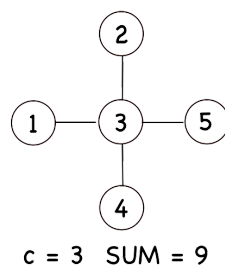
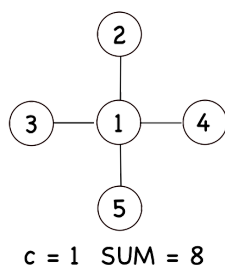
Ilighed med magiske trekanter har disse cirkler forbundet i et geometrisk mønster og en tilhørende gruppe af tal. Sæt tallene i cirklerne, så hver lige linje af forbundne cirkler har samme sum.

Analysen af disse gåder svarer til, hvad der blev gjort for Magic Triangles. Lad SUM være den fælles sum, som alle rækkerne deler. Lad  $c$  være værdien af den midterste cirkel, for puslespil, der har en. Den generelle strategi vil være at lægge alle rækkerne sammen og undersøge forholdet, der afsløres. Bemærk også, at ligesom for Magiske trekanter kan en ny løsning oprettes ved at trække alle indtastninger fra en mere end det største tal.

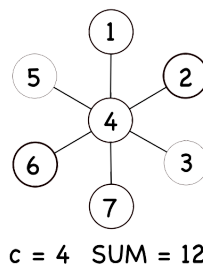
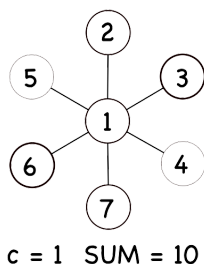
1. Tallene fra 1 til 4 er i plustegn form uden cirkler til fælles. Tallene 1 til 4 summerer til 10, og dette er fordelt ligeligt mellem de to retninger. Så SUM = 5 og svaret er nemt.



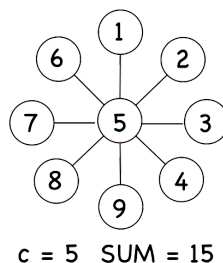
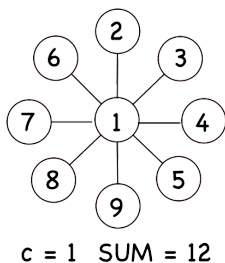
2. Tallene fra 1 til 5 er i et plustegn med én cirkel til fælles i midten. Tallene 1 til 5 summeres til 15. Sammenlægning af de to retninger giver  $2 \times \text{SUM} = 15 + c$ . Fordi  $15 + c$  skal være lige, kan  $c$  være 1, 3 og 5. Få løsningen for  $c = 5$  (SUM = 10) fra  $c = 1$ -løsningen ved at trække alle tallene fra 6.



3. Tallene fra 1 til 7 er i linjer af 3 cirkler med en fælles cirkel i midten. Sammenlægning af de tre retninger giver  $3 \times \text{SUM} = 28 + 2 \times c$ . Fordi 3 deler  $28 + 2 \times c$  ligeligt, tvinger dette  $c$  til at være 1, 4 eller 7. Løsningerne for  $c = 1$  og 4 er givet.



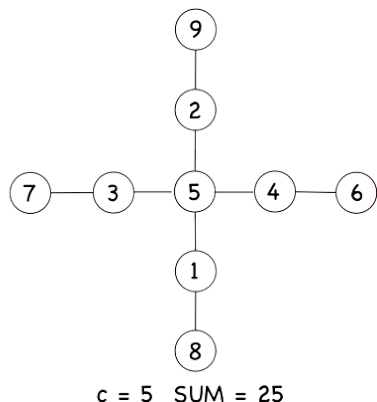
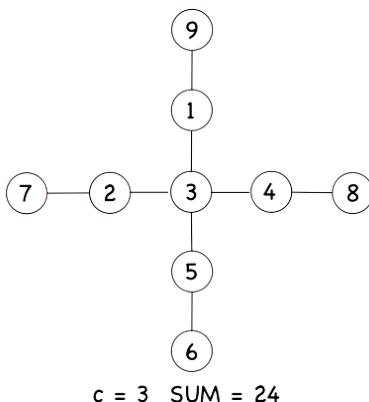
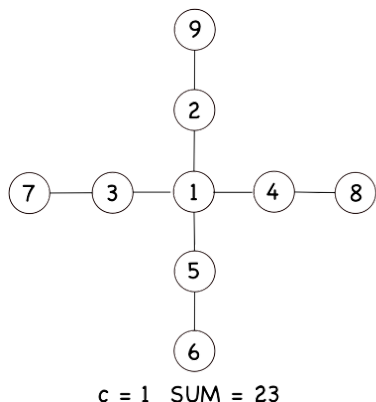
4. Tallene fra 1 til 9 er i linjer af 3 cirkler med en fælles cirkel i midten. Sammenlægning af de fire retninger giver  $4 \times \text{SUM} = 45 + 3 \times c$ . Fordi 4 deler  $45 + 3 \times c$  ligeligt, tvinger dette  $c = 1, 5$  eller 9.



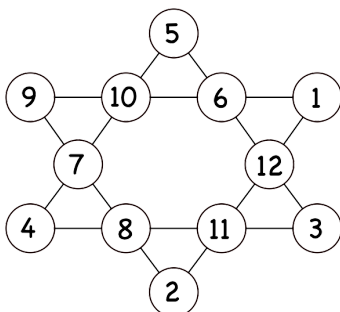
5. Tallene fra 1 til 5 er placeret i en L-form med én cirkel til fælles i hjørnet. Dette er virkelig det samme som problem #2, så løsningerne er stort set de samme.

6. Tallene fra 1 til 8 er i et plustegn uden fælles cirkler. De to retninger deler ligeligt 36, summen af alle tallene, så  $\text{SUM} = 18$ . Der er mange måder at løse dette på ved at dele mængden af tal i to grupper, der summerer til 18. En løsning er 1, 2, 7, 8 og 3, 4, 5, 6, og en anden er 1, 3, 6, 8 og 2, 4, 5, 7.

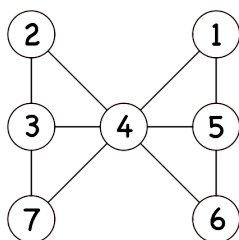
7. Tallene fra 1 til 9 er i et plustegn med én cirkel til fælles i midten . Sammenlægning af de to retninger giver  $2 \times \text{SUM} = 45 + c$ , så  $c = 1, 3, 5, 7$  og  $9$ . Løsninger for  $c = 1, 3$  og  $5$  er givet.



8. Tallene fra 1 til 12 er i stjerneform. Dette har 6 retninger af linjer af 4 cirkler. Denne er meget sværere end de andre. Hvis du lægger alle retningerne sammen, vil hvert tal blive involveret to gange. Tallene fra 1 til 12 summerer til 78. Vi har således  $6 \times \text{SUM} = 2 \times 78$ , hvilket betyder  $\text{SUM} = 26$  (som givet i hintet). En løsning er givet nedenfor. Som altid kan en anden løsning opnås ved at trække alle indtastningerne fra 13.



9. Tallene fra 1 til 7 er i H-form - 3 lodret til venstre, 1 i midten, 3 lodret til højre. Der er 5 mulige linier af 3 forbundne cirkler. Hvis de 5 retninger lægges sammen, vil alle cirklerne blive brugt to gange, med undtagelse af midten, der bruges tre gange. Sammenlægning af de fem retninger giver  $5 \times \text{SUM} = 2 \times 28 + c$ . Fordi 5 deler  $56 + c$  ligeligt, tvinger dette  $c = 4$ , og i så fald  $\text{SUM} = 12$  (som givet i hintet). Bemærk, at hverken 2 eller 3 kan være på samme side som 1'eren, og det fører til følgende løsning.



# Kapitel 4 – Sum kvadrat

Start med et 3 gange 3 gitter, der har målsummer givet for hver række og kolonne. Nogle af tallene fra 1 til 9 er allerede placeret i gitteret. For de tal, der endnu ikke er placeret, er udfordringen at placere dem for at få række- og kolonnesumme til at være målværdierne.

For at lave et af disse puslespil, start med at placere stykker papir med tallene fra 1 til 9 på et 3 x 3 gitter. For hver række og kolonne skal du skrive summen til højre eller nedenfor. Fjern derefter nogle af tallene fra gitteret. Giv til sidst de stykker papir, du fjernede, til dit barn og spørg "hvor var disse?" Fordi disse er så nemme at lave, er de gode gåder for dit barn at skabe, så du kan løse dem.

En variation, der holder summerne lidt mindre, er at bruge tallene fra 0 til 8 i stedet for. En sværere variation er at gøre det samme med tallene 1 til 12 i et 3 gange 4 gitter, eller endda 1 til 16 i et 4 gange 4 gitter.

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

At lave originalen udfyldt puslespil er let nok. Som nævnt ovenfor skal du bare indtaste alle tallene og skrive summen ned. Udfordringen for puslespilmageren er at fjerne den helt rigtige mængde information, så puslespillet er udfordrende, men ikke for svært.

**Strategier til løsning og skabelse:** Start med at udfylde firkanter, der er de enkelte manglende tal i en række eller kolonne. Det længst til venstre af disse tre gåder er ret nemt at løse, fordi efter 5'eren og 7'eren er udfyldt, så er 3'eren og 2'eren nemme at løse, og til sidst vil de 8 være nemme at løse - hver enkeltstående skaber nye enkeltpersoner, der er let at beregne.

Let at beregne puslespil er god praksis for dit barn, så du skal ikke bekymre dig om at gøre alle gåderne vanskelige.

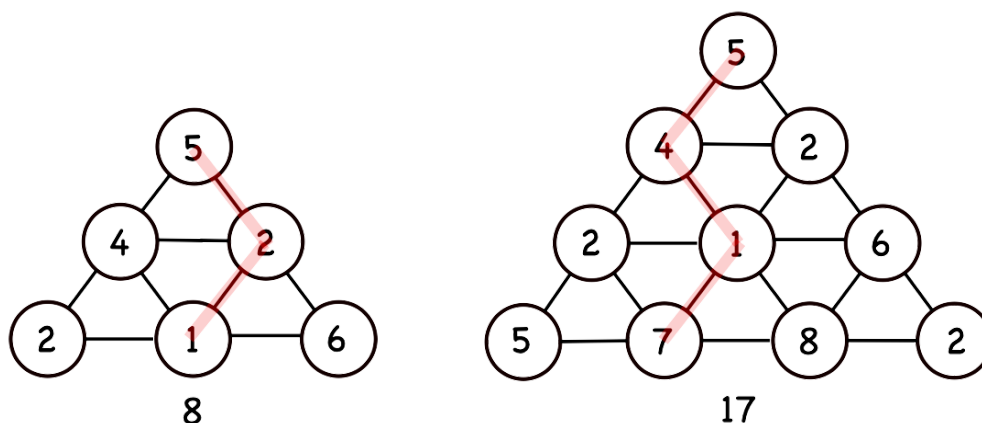
Midterpuslespillet er lidt sværere. Der er ingen singletoner. En god strategi for disse er at lede efter rækker eller kolonner, der har særligt store eller små manglende summer – disse vil have relativt få valgmuligheder at vælge imellem. Den nederste række og kolonnen længst til højre er gode steder at starte for dette puslespil. De manglende tal i den nederste række summerer til 16, så de skal være 7 og 9. 9'eren kan ikke gå i kolonnen med 6'eren (summen ville være for stor for den kolonne), så det placerer 7'erne og 9'erne. Resten følger som i forrige puslespil.

I puslespillet længst til højre er to af sidenumrene udeladt. Når først dit barn indser, at sidetallene summer til 45, som er summen af tallene fra 1 til 9, er det nemt at udfylde et enkelt manglende sidetal.

## Kapitel 4 — Tilføjelse Pyramide

En pyramide med 10 tal placeret i 4 rækker er givet med et mål nummer. Udfordringen er at finde en vej gennem pyramiden ved hjælp af et tal fra hver række, så summen af tallene er måltallet. Tallene på stien skal røre hinanden.

Lav et af disse puslespil ved at udfylde de tal, som du vil danne stien, og noter summen af disse tal. Udfyld derefter de resterende lodde numre i pyramiden. Antallet af mulige stier gennem pyramiden fordobles med tilføjelsen af hver række, så at lave større pyramider er en måde at udfordre et barn på, som finder 10-tals puslespillet nemt. For et barn, der finder et 10-tals-puslespil svært, skal du starte med 6-tals-gåder, indtil de bliver nemme og hurtige at løse.



Ved større puslespil kan det være en udfordring for puslespilmageren at sikre, at der kun er én korrekt vej gennem pyramiden. Du skal ikke bekymre dig for meget om det. Selvom det er rart, hvis der kun er én vej, vil dit barn nyde at vise dig, at der er mere end én måde at løse det på.

# Kapitel 4 — Undersøgelser

## — BLOMSTERBLOMSTER —

### UNDERSØGELSE

I en magisk have er der to slags blomster. Den ene har 4 kronblade og den anden har 7 kronblade. Et barn blev bedt om at plukke nogle blomster, så det samlede antal kronblade var 13. Kunne det lade sig gøre? Hvad med 15 kronblade? For hvilket antal kronblade er det muligt? For tal, der er mulige, kan det gøres på mere end én måde? For eksempel er 32 kronblade fire 7'ere og en 4'er, og det er også otte 4'ere.

Ved at prøve mange par tal, er der masser af eksempler at lege med. For nogle talpar kommer der et punkt, hvor alle antal kronblade er mulige, og for andre talpar er der ikke et sådant punkt. For 4 og 7 er hvert tal fra 18 og frem muligt. For 3 og 6 er der ikke noget punkt, hvorefter alle tal opstår.

Hvad er mønsteret, og hvad skaber det mønster? Det er ofte spørgsmål, der dukker op, og det er her, der sker mange interessante ting.

Det er nemmest at se, hvad der sker, når et tal deler begge tal ligeligt. Tag 3 og 6 for eksempel. Tænk på disse tal som  $1 \times 3$  og  $2 \times 3$ . Når du lægger disse tal sammen, vil du altid få et eller andet antal 3'ere. Der er ingen måde at lægge 3'ere og 6'ere sammen for at få 10, fordi 10 ikke er et multiplum af 3.

Når 1 er det eneste tal, der ligeligt deler begge tal, vil der altid komme et punkt, hvor hvert tal kan opnås. For 4 og 7 er det tal 18. For at finde det tal skal du trække 1 fra hvert af tallene i parret og gange de nye tal sammen. I dette tilfælde giver det  $3 \times 6 = 18$ . En anden interessant facet af denne situation er, at præcis halvdelen af tallene under 18 vil kunne nås. Hvorfor dette virker kræver noget matematik lidt for sofistikeret for et lille barn; det er dog sjovt at lege med disse beregninger, og dit barns erfaringer med disse mønstre kan pludselig klikke på plads meget senere.

## — KLATRE TRIN — HVOR MANGE MÅDER —

### UNDERSØGELSE

Antag, at dit barn kan lide at tage trin to ad gangen nogle gange, men et ad gangen andre gange. Hvis dit barn ønsker at gå nogle trin op, er et naturligt spørgsmål: Hvor mange måder kan dette gøres på?

For eksempel, for 0 skridt er der kun én vej – du står bare der. For 1 trin er der én vej - du tager et enkelt trin. For to trin kan du enten tage et dobbelttrin eller to enkelttrin.

Dit barn bør omhyggeligt tælle mange tilfælde af dette og lave en tabel over resultaterne. Når der er masser af information, hjælper en tabel ofte med at organisere informationen og tillade mønstre at skille sig ud. Tabellen ville se sådan ud (okay, at gå ud over 6 kan kræve for meget tålmodighed, men her er tallene):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Efter at have set på disse tal, kan dit barn bemærke, at hvert par på hinanden følgende tal lægger op til det næste tal. Hvorfor sker dette? Disse tal kaldes Fibonacci-numre. Reglen for at oprette de officielle Fibonacci-tal er, at hvert tal er summen af de to foregående. Dette sker også for trinene. Hmmm ...

Lad os se nærmere på et eksempel - f.eks. 5 trin. De 8 muligheder er: 1+1+1+1+1, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 1+1+1+2, 1+2+2 og 2+1+2. De første 5 muligheder bruger 1 til det sidste træk, og de sidste 3 muligheder bruger 2 til det sidste træk. Det forklarer det – du kan gå 5 trin op ved enten at gå 4 trin op og tage 1 trin mere, eller ved at gå 3 trin op og gå 2 trin mere op. Antallet af måder at gå 5 trin op er nøjagtigt lig med summen af antallet af måder at gå 4 trin op plus antallet af måder at gå 3 trin op.

Mønstre forstås ofte ved tålmodigt at gennemgå eksempler, organisere dataene, se nøje på dataene og grave efter forklaringer på, hvorfor tingene sker, som de gør. Dette er en god vane at udvikle i dit barn.

## — BALANCEskala —

### UNDERSØGELSE

En balancevægt er en simpel enhed til at fortælle, hvornår to ting har nøjagtig samme vægt. Vægten leveres normalt med et sæt vægte, der bruges til at måle vægten af andre genstande. Der er mange interessante undersøgelser, du kan lave, hvis du begrænser de vægte, du må bruge.

**Én slags vægt:** Antag, at du har mange vægte, men de er alle ens - f.eks. 5 enheder. Så er de eneste ting, du kan veje præcist, objekter, der er et multiplum af 5 (ligesom spring over at tælle med 5).

**To slags vægte - én side:** Antag, at du har masser af vægte, der enten er 4 enheder eller 7 enheder, og du kun bruger dem på den ene side af vægten. De ting, du kan veje, er de samme tal, som du fandt i undersøgelsen af blomsterbladene. For 4 og 7, startende ved 18 enheder kan du veje alt nøjagtigt. Hvis vægtene er 4 enheder og 6 enheder, kan du kun veje lige tal, der starter med 4.



**To slags vægte - begge sider:** Efter at have lavet undersøgelsen med to slags vægte på den ene side, kan dit barn blive overrasket, hvis du spørger dem at veje en 3-enheds vare, eller endda en 1-enhed genstand, med 4'ere og 7'ere. Tricket er at lægge nogle vægte på den ene side og andre vægte på den anden side. Kontroller for eksempel, at en vare vejer 3 enheder ved at sætte den med en vægt på 4 enheder og se, at den balancerer med en vægt på 7 enheder. På samme måde skal du kontrollere, at en vare vejer 1 enhed ved at sætte den med en 7-enhedsvægt og se, at den balancerer med to 4-enhedsvægte.

Der er en vigtig matematisk sætning kaldet Bezouts sætning gemt i denne undersøgelse. Dit barn behøver ikke at vide noget om den teorem på nuværende tidspunkt, men er det ikke fedt, at et lille barn kan lege med avanceret matematik!

**Fordobling af vægte:** Hvad sker der, hvis du har én vægt hver for hver af vægtene i fordobling progression 1, 2, 4, 8 og 16? Hvor mange måder kan du veje noget, der vejer 13? Hvad er den største vægt du kan måle?

Efter nogle undersøgelser vil du opdage, at du kan veje alt op til en mindre end det dobbelte af den højeste vægt - i dette tilfælde er det 31. Desuden kan hvert emne, du kan veje, kun vejes på én måde - for eksempel  $13 = 1 + 4 + 8$ , og der er ingen anden måde at gøre det på. Ret sejt! Denne situation er relateret til det binære talsystem.

**Fibonacci-vægte:** Hvad sker der, hvis vægtene er i Fibonacci-tallene? Er der mere end én måde at veje nogle vægte på? Find en begrænsning, der ville medføre, at der kun er én vej for hver vægt.

Antag, at du har en hver til vægtene 1, 1, 2, 3, 5, 8 og 13. Hermed er  $10 = 2 + 3 + 5 = 2 + 8 = 1 + 1 + 3 + 5 = 1 + 1 + 8$ . Det, der forårsager duplikeringen, er, at Fibonacci-reglen skaber mere end én måde at skrive Fibonacci-tallene på - for eksempel  $2 = 1 + 1$  og  $8 = 5 + 3$ . Måden at løse dette problem på er at insistere på, at du ikke kan bruge to Fibonacci-numre, der er naboer til hinanden i rækkefølgen. Når du tilføjer den begrænsning, er den eneste måde at få 10 på  $2 + 8$ .