⚠ Dieses Kapitel wurde mit Google Translate übersetzt – Bitte helfen Sie uns, dies zu verbessern!

Early Family Math

Kapitel 5 Bonusmaterial

— Einführung —

Sind Sie jemand, der sich mehr Beispiele, Diskussionen und Kommentare in den bewusst kurzen Beschreibungen der Lektionen wünscht? Dann sind Sie bei uns genau richtig! Diese Datei enthält Bonusmaterial für einige der Aktivitäten aus Kapitel 5.

Für Rätsel werden viele Beispiele für gelöste Rätsel zusammen mit zusätzlichen Kommentaren zu ihrer Erstellung gegeben. Das Early Family Math-Programm basiert auf der Idee, dass frühe Mathematik etwas ist, das eine Familie gemeinsam tun sollte, und das Erstellen von Puzzles für Ihr Kind, die es mit Ihnen machen kann, ist ein wichtiger Teil dieses Prozesses. Sobald Sie mit jedem Rätsel den Dreh raus haben, sollten Sie feststellen, dass die meisten, wenn nicht alle Rätsel für Sie ziemlich einfach zu erstellen sind.

Viele dieser Rätsel haben unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, und auf den kommenden Seiten finden Sie viele Vorschläge und Beispiele, wie Sie diese Level erstellen können. Beginnen Sie immer mit den einfachsten Rätseln. Es ist viel besser, wenn Ihr Kind Erfolg, Verständnis und Spaß mit etwas zu einfachen Rätseln hat, als von zu schweren Rätseln frustriert, entmutigt und überfordert zu sein. Sobald Ihr Kind Vertrauen und Begeisterung für eine mathematische Aktivität aufgebaut hat, ist dies die Zeit, um langsam größere Herausforderungen zu integrieren. Außerdem werden nicht alle Rätsel für alle Spaß machen, also dränge nicht auf Rätsel und Aktivitäten, die einfach nicht miteinander zu verbinden scheinen.

Das finden Sie auf den folgenden Seiten:

Kapitel 5 — Nim mit Faktoren

— Einführung —

Beginnen Sie mit einer beliebigen Zahl, sagen wir 20. Lassen Sie das Kind entscheiden, ob es an erster oder zweiter Stelle steht. Während seines Zuges darf ein Spieler einen beliebigen Teiler der aktuellen Zahl von der Zahl abziehen. Der zu 0 gezwungene Spieler verliert.

— Analyse —

Wie üblich ist es eine gute Strategie, dieses Spiel kennenzulernen, indem man sich eine einfachere Version des Spiels ansieht, was in diesem Fall bedeutet, mit sehr kleinen Zahlen zu beginnen. Wenn Sie an der Reihe sind und mit jeder dieser Zahlen konfrontiert sind, passiert Folgendes: 1 - verlieren, 2 - gewonnen, 3 - verloren, 4 - gewonnen, 5 - verloren, 6 - gewinnen, 7 verlieren und 8 gewinnen. Inzwischen ist das Muster klar - wenn es Ihr Zug ist und Sie eine ungerade Zahl haben, dann verlieren Sie; Wenn Sie eine gerade Zahl haben, gewinnen Sie.

Die Gewinnstrategie zu finden ist ein großer Schritt, aber gehen wir tiefer. Warum funktioniert das? Was sind die Eigenschaften von ungeraden und geraden Zahlen, die diese Situation verursachen? Stellen Sie Ihrem Kind diese Frage und geben Sie ihm viel Zeit, darüber nachzudenken und damit zu experimentieren - es gibt keine Eile, und dieser Prozess des Ringens mit einer Frage ist von unschätzbarem Wert und sollte nicht kurzgeschlossen werden.

Einige Experimente mit kleinen Zahlen zeigen schnell, was vor sich geht. Wenn Sie eine ungerade Zahl haben, sind alle Teiler ungerade. Wenn Sie also einen Teiler subtrahieren, ist das Ergebnis eine gerade Zahl. Folglich führen ungerade Zahlen in einer Runde immer zu einer geraden Zahl in der nächsten Runde. Gerade Zahlen haben immer sowohl ungerade als auch gerade Zahlen für Teiler. Die Situation ist also nicht ganz dieselbe. Wenn Sie jedoch eine gerade Zahl haben, ist es Ihr Ziel, Ihrem Gegner eine ungerade Zahl zu geben, und es gibt eine einfache Möglichkeit, dies zu tun - wählen Sie den Teiler 1 und ziehen Sie ihn ab!

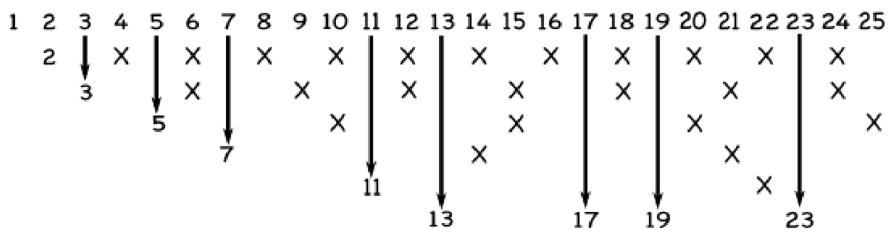
Kapitel 5 — Sieb des Eratosthenes

— Einführung —

Beginnen Sie mit einem Zahlenstrahl von 1 bis 25 – oder einem größeren Bereich, wenn der Platz und Ihre Geduld es zulassen.

Schreiben Sie die Zahl 2 darunter. Setzen Sie in der Zeile sogar mit dieser 2 X unter jedes Vielfache von 2.

Ziehen Sie nun die erste Zahl ohne X darunter (in diesem Fall 3) und setzen Sie sie in die nächste Zeile. Schreiben Sie die 3 und setzen Sie X für alle ihre Vielfachen in diese Zeile. Fahren Sie auf diese Weise fort. Am Ende haben Sie alle heruntergezogen *Primzahlen*. Denken Sie daran, dass 1 eine *Einheit* und keine Primzahl ist!



— Analyse —

Dieser einfache Vorgang enthüllt einige interessante Fakten über Primzahlen. Sehen Sie, ob Ihr Kind einige dieser Fragen stellen kann. Wenn sie sich jedoch nicht von selbst stellen, sollten Sie sich hier einige Fragen stellen.

1) Warum sind die Zahlen, die nach unten fallen, Primzahlen?

Angenommen, Sie haben eine zusammengesetzte Zahl. Wir wollen zeigen, dass unter dieser Zahl ein X steht. Da es zusammengesetzt ist, ist es durch eine Zahl n zwischen 1 und dieser Zahl teilbar. Wenn n eine Primzahl ist, dann hätte unsere zusammengesetzte Zahl ein X darunter, da n eine frühere Primzahl ist. Wenn n keine Primzahl ist, dann hat es ein X von einer früheren Primzahl darunter, nenne es p. Nun teilt p gleichmäßig n und n teilt unsere neue Zahl gleichmäßig, also muss p unsere neue Zahl teilen. Folglich wäre beim Markieren der Vielfachen von p ein X unter unsere neue Zahl gesetzt worden.

2) Wenn Sie X für die Vielfachen einer Primzahl platzieren, gibt es einige Zahlen, die bereits ein X von einer früheren Primzahl haben. Wann passiert das und wann nicht?

Schauen wir uns die Vielfachen von 5 im obigen Sieb an. Die Vielfachen 5 x 2, 5 x 3 und 5 x 4 sind bereits durchgestrichen. Nur 5 x 5 ist neu. Dies geschieht, weil 5 x 2, 5 x 3 und 5 x 4 alle Vielfache von 2 und 3 sind, frühere Primzahlen. Wenn wir X an neue Stellen setzen wollen, müssen wir 5 mit Zahlen multiplizieren, die nur Primfaktoren ab 5 haben. Da es ein wenig mühsam ist, all das im Auge zu behalten, streichen manche Leute nur ungerade Vielfache und belassen es dabei.

3) Was war für dieses Sieb die letzte Primzahl, die ein nützliches neues X in ihrer Reihe hatte?

In diesem Sieb sind die Primzahlen mit nützlichen X 2, 3 und 5. Die Vielfachen von 7 und 11 waren alle alte Xs. Wenn Sie sich die Antwort auf die letzte Frage ansehen, sehen Sie die Antwort hier. Die einzige Möglichkeit, neue X zu erhalten, besteht darin, eine Primzahl mit Primzahlen zu multiplizieren, die größer oder gleich ihr selbst sind. Sobald wir eine Primzahl wie 7 mit $7 \times 7 > 25$ erreicht haben, brauchen wir sie nicht mehr zu überprüfen. Wir müssen also nur Primzahlen prüfen, deren Quadrat kleiner oder gleich der letzten Zahl ist.

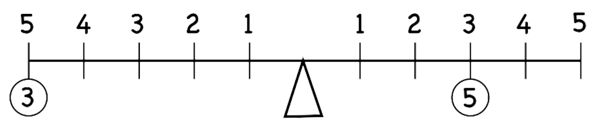
4) Wenn Sie eine Zahl, sagen wir 53, erhalten würden, durch welche Primzahlen müssten Sie diese dividieren, um zu sehen, dass es sich um eine Primzahl handelt?

Von der Antwort auf die letzte Frage brauchen wir nur noch Primzahlen zu prüfen, deren Quadrat kleiner oder gleich 53 ist. Diese Primzahlen sind 2, 3, 5 und 7 – keine davon teilt 53 gleichmäßig, also muss 53 eine Primzahl sein!

Kapitel 5 — Hebel und Mobiles

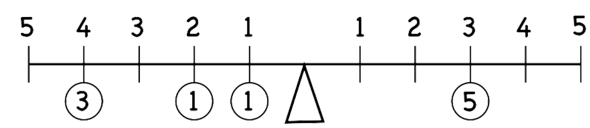
— Hebel —

Das Hebelprinzip besagt, dass die Kraft, die eine Masse auf eine Seite eines Hebels ausübt, gleich der Masse mal ihrem Abstand vom Drehpunkt, dem Drehpunkt, ist.



Im obigen Hebel hat die 3 auf der linken Seite einen Abstand von 5 vom Drehpunkt, also beträgt seine Kraft 3 x 5 = 15. Die 5 auf der rechten Seite hat einen Abstand von 3 vom Drehpunkt, also beträgt seine Kraft 5 x 3 = 15. Dieser Hebel ist im Gleichgewicht.

Bei mehr als einem Gewicht auf einer Seite addieren sich die Kräfte.



In diesem Hebel befinden sich 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15 auf der linken Seite und 5 x 3 = 15 auf der rechten Seite. Es ist also im Gleichgewicht.

Wir beschränken diese Probleme auf die Verwendung ganzer Zahlen. Sie können entscheiden, ob Sie zulassen, dass mehrere Gewichte an demselben Punkt aufgehängt werden – wir gehen davon aus, dass es in der folgenden Diskussion in Ordnung ist, mehrere Gewichte zu verwenden.

— Hebelrätsel —

Sie haben ein Gewicht von 3 Gewichtseinheiten und ein Gewicht von 5 Gewichtseinheiten, die Sie auf gegenüberliegende Seiten des Drehpunkts legen können. Wo sind sie auszubalancieren? Die Antwort darauf können die Distanzen 5 und 3 sein, es können aber auch 10 und 6 oder noch größere Antworten wie 15 und 9 sein. Seien Sie offen für Diskussionen, was Ihr Kind sich einfallen lässt.

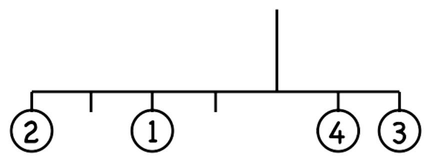
Wenn Sie ein 3-Einheiten- und ein 5-Einheiten-Gewicht auf einer Seite eines Hebels anbringen müssen, welche Gewichte können Sie dann in welchen Abständen auf der anderen Seite platzieren? Diese Frage setzt die Fragen auf der Seite „Make It Count“ am Ende von Kapitel 4 fort. Untersuchen Sie wie zuvor verschiedene Kombinationen von Gewichtungen. Was passiert, wenn 3 und 5 durch 4 und 5, 4 und 9 oder 6 und 9 ersetzt werden?

Wie ändert sich dieses letzte Problem, wenn wir die 3-Einheiten- und 5-Einheiten-Gewichte auf gegenüberliegenden Seiten des Drehpunkts platzieren? Jetzt ist es einfach, ein 1-Einheit-Gewicht zu wiegen, indem Sie 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1 verwenden. Welche anderen Gewichte können Sie auf diese Weise wiegen?

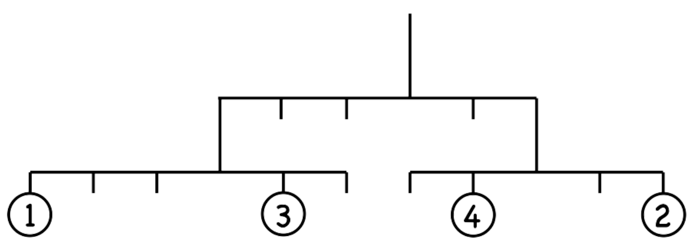
— Mobiles —

Sie erhalten einige Gewichte und ein Design für ein Mobile mit einigen Befestigungspunkten. Die Herausforderung besteht darin, pro Befestigungspunkt höchstens ein Gewicht anzubringen, damit das Handy an jedem Arm balanciert. Um dieser Probleme willen gehen wir davon aus, dass die Drähte, aus denen das Handy besteht, schwerelos sind. Jeder Arm im Handy ist ein Hebel, der balanciert werden muss, daher sind diese Rätsel eine Erweiterung des Hebels Ausgleichs – üben Sie diese Rätsel, bevor Sie damit beginnen.

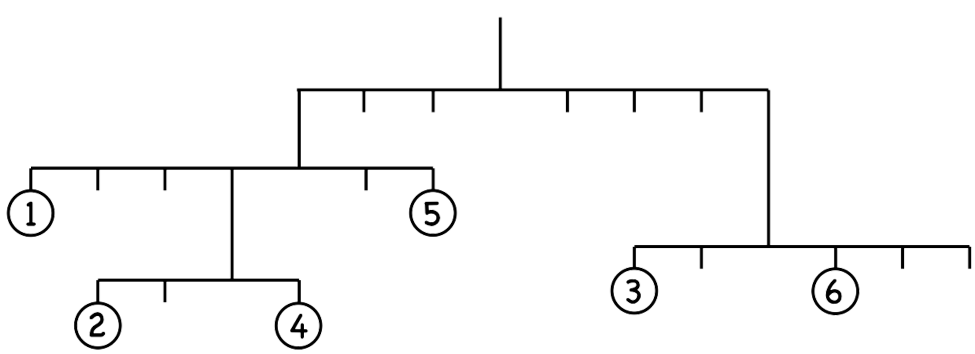
Beginnen Sie mit den einfachsten Handys, die nur Hebel in der Luft sind. Hier ist eine Lösung, um die Gewichte von 1 bis 4 auf dieses Handy zu legen, um es auszubalancieren. Dies funktioniert als Hebel mit dem Drehpunkt am Aufhängepunkt. Für dieses Mobile haben wir 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2.



Wenn das Mobile mehr als eine Ebene hat, muss jeder einzelne Arm auf jeder Ebene als Hebel balancieren. Bei diesem nächsten Mobile gleichen sich die beiden unteren Arme aus, denn 1 x 3 = 3 x 1 und 4 x 1 = 2 x 2. Für das nächste Level addierst du einfach die Gewichte darunter. Zum Beispiel ist das Gewicht auf der linken Seite 1 + 3 = 4 – was die nächsthöhere Ebene betrifft, spielt es keine Rolle, wo sich die Gewichte auf diesem unteren Arm befinden. Für die nächsthöhere Ebene gilt also (1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12, sodass auch die oberste Ebene ausgeglichen ist.



Viel Spaß beim Erstellen von mobilen Puzzles füreinander. Hier ist ein letztes, mit dem Sie spielen können, indem Sie jede der Zahlen von 1 bis 6 verwenden. Machen Sie sich keine Sorgen, dass Sie ausgefallen sind und jede Zahl einmal verwenden. Jedes fertige Puzzle wird Spaß machen. Wenn wir die Ebenen überprüfen, haben wir: 2 x 2 = 4 x 1; 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2; 3 x 2 = 6 x 1; und (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4.



Kapitel 5 — Die Box aufteilen

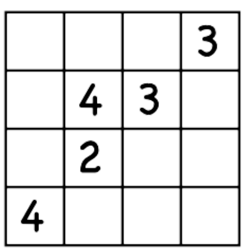
— Einführung —

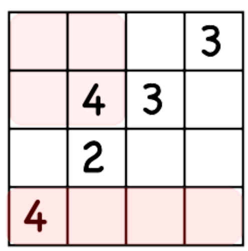
Ein Rechteck, 4 mal 4 oder größer, mit Zahlen in einigen seiner Quadrate, ist in kleinere Rechtecke aufgeteilt werden. Jede Zahl muss in einem separaten Rechteck enden, dessen Fläche diese Zahl ist.

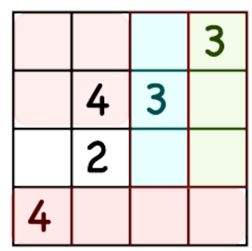
Für Erwachsene ist das Konstruieren dieser Rätsel einfach genug. Nehmen Sie ein Rechteck, teilen Sie sein Inneres in Rechtecke auf, geben Sie Zahlen für die Bereiche innerhalb jedes inneren Rechtecks ein und entfernen Sie dann alle Zeichen der inneren Rechtecke. Der einzige knifflige Teil ist das Einfügen von Zahlen an Stellen, die das Lösen des Rätsels relativ einfach machen - Sie können jederzeit Hinweise geben, wenn Ihr Rätsel zu schwierig wird.

— Lösungsstrategien —

Hier sind einige allgemeine Strategien, die das Lösen dieser Rätsel vereinfachen können. Geben Sie Ihr Bestes, damit Ihr Kind diese Regeln entdeckt, während es mit den Rätseln spielt. Machen Sie eine Liste mit den Regeln, die sie sich ausdenken.







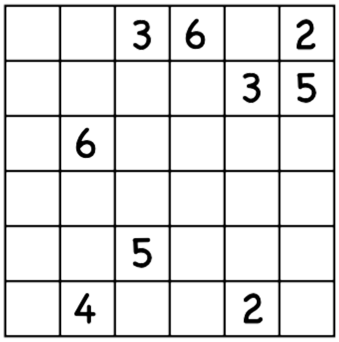
1) Betrachten Sie Zahlen mit nur einer oder zwei Optionen für ihre Rechtecke.

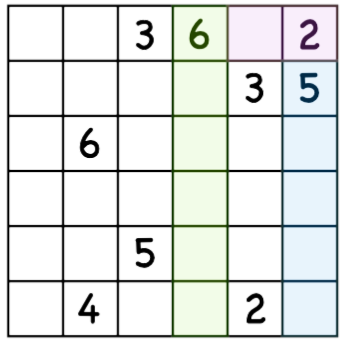
Beide 4er sind stark eingeschränkt. Jede 4 darf sich nur innerhalb eines 1 x 4 oder eines 2 x 2 Rechtecks befinden. Die obere 4 ist eingesäumt, kann also nicht innerhalb eines 1 x 4 sein. Es muss also ein 2 x 2 Rechteck in der oberen linken Ecke sein. Damit bleibt der unteren 4 nur die Möglichkeit, dass ihr Rechteck 1 mal 4 ist und entlang der Unterseite verläuft.

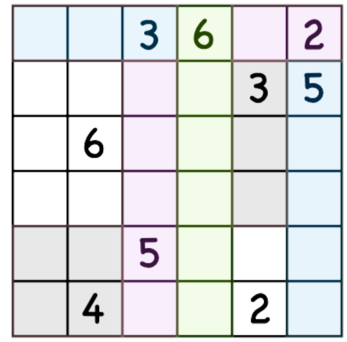
2) Schauen Sie sich Primzahlen an – sie müssen sich in einem 1 mal n Rechteck befinden.

Die 3 im obigen Puzzle müssen in einem 1 x 3 Rechteck enthalten sein. Die 3 in der oberen rechten Ecke kann nur Teil eines 1 x 3 Rechtecks sein, das entlang der oberen Kante oder entlang der rechten Seite verläuft. Das obere linke 2 x 2 Quadrat, das für die 4 blockiert ist, macht es unmöglich, ein 1 x 3 entlang der oberen Kante zu haben.

Die 1 zu 4 entlang der Unterseite zwingt die 1 zu 3, damit die niedrigere der beiden 3en die höhere der beiden vertikalen Möglichkeiten ist.







3) Zahlen nahe der maximalen Dimension haben oft nur wenige Optionen.

Schauen Sie sich die 6er und 5er in diesem nächsten Puzzle an. Die oberste 6 braucht viel Platz, und der einzige Weg, um genug Platz dafür zu haben, ist vertikal gerade nach unten und verbraucht die gesamte Säule. Die anderen 6 können nicht 1 x 6 sein, da die Zeile durch die Spalte der anderen 6 abgeschnitten wurde. Die untere 6 muss also eine 2 x 3 sein, was noch nicht ganz bestimmt ist.

Als ein weiteres Beispiel, wenn es eine 8 in diesem Puzzle gegeben hätte, hätte 1 mal 8 nicht gepasst, also müsste es Teil eines 2 mal 4 Rechtecks sein.

4) Felder, die eingerahmt sind, haben nur wenige Optionen.

Die oberste 5 ist eingerahmt, so dass die einzige Möglichkeit besteht, sich in einer 5-Box-Spalte zu befinden. Die anderen 5 müssen, da es sich ebenfalls um eine Primzahl handelt, vertikal oder horizontal verlaufen. Es wird horizontal von der Spalte für die 6 abgeschnitten, muss also vertikal bis direkt unter die 3 gehen.

5) Ecken sind oft stark eingeschränkt.

Die 2 in der oberen rechten Ecke muss horizontal verlaufen, damit sie leicht auszufüllen ist.

Kapitel 5 — Buchstaben Ersetzungsrätsel

— Einführung —

Sobald sich Ihr Kind mit den fehlenden Zahlenrätseln von ein paar Seiten weiter oben in diesem Kapitel vertraut gemacht hat, kann es beginnen mit diesen Rätseln spielen. Dabei werden eine oder mehrere Ziffern durch Buchstaben ersetzt. Die drei Regeln für Buchstaben lauten:

- Ein Buchstabe hat immer die gleiche Ziffer Ziffer ganz
- Dielinks einer Zahl ist nie 0
- Unterschiedliche Buchstaben müssen unterschiedliche Ziffern sein

Erstellen Sie diese Rätsel, indem Sie eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe nehmen und eine oder mehrere Ziffern ersetzen. Die Rätsel können auch erstellt werden, um Ihrem Kind interessante Problemlösung Herausforderungen zu stellen. Beachten Sie, dass die Werte der Buchstaben nicht von Puzzle zu Puzzle übertragen werden.

— Beispiele —

Dieses erste Beispiel veranschaulicht, wie Sie aus einer Standard-Additions- oder Subtraktionsaufgabe ein Buchstabenersetzungsrätsel machen können. Die erste Version ersetzte alle 6er durch A und die zweite Version ersetzte die 2er durch Bs.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

Der Rest dieser Beispiele ist sorgfältig konstruiert, um eine Lösung unter Verwendung der Eigenschaften der jeweiligen Situation zu ermöglichen. Eine zu beachtende Eigenschaft ist, dass beim Addieren von zwei Zahlen der Übertrag in die nächste Spalte immer entweder 0 oder 1 ist. In der Aufgabe A + A = C4 muss C also beispielsweise 1 sein, weil es nicht sein darf 0.

$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array} \quad \begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}$$

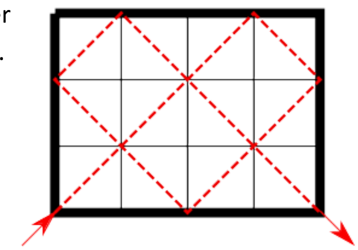
$$\begin{array}{r} A \\ A \\ +A \\ \hline B2 \end{array} \quad \begin{array}{r} C \\ C \\ +C \\ \hline D4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +7 \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +B \\ \hline B0 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array} \quad \begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}$$

Kapitel 5 — Mit Formen spielen

— Billardkugel hüpfen — Einführung —

Stellen Sie sich einen Billardtisch vor, der in jeder Ecke eine Tasche hat. Wenn ein Ball von der Seite des Tisches abprallt, springt er im gleichen Winkel weg, in dem er hereingekommen ist. Wenn wir einen Ball in einem Winkel von 45 Grad aus der unteren linken Ecke schießen, wo landet er? Die Antwort hängt von der Größe der Tabelle ab. Rechts abgebildet ist, was auf einem 3 x 4 Tisch passiert.



Geben Sie Ihrem Kind eine Zeichnung eines Tisches und fordern Sie Ihr Kind auf, vorherzusagen, welche Ecke zuerst getroffen wird und wie viele Sprünge es brauchen wird, bevor es zu dieser Ecke kommt.

— Hüpfende Billardkugel — Analyse —

Lassen Sie Ihr Kind zunächst damit herumspielen und haben Sie keine Eile, Ergebnisse zu entdecken. Wie Sie sehen werden, beinhaltet dieses Problem einige ausgeklügelte Ideen für einen jungen Menschen. Stellen Sie bei Bedarf ein oder zwei Fragen, um ihrem Denken etwas mehr Struktur zu geben. Sie wissen, was auf Sie zukommt – schauen Sie sich zuerst einfachere Tabellen an, um nach Mustern zu suchen – wenn diese Idee für Ihr Kind automatisch wird, wird es ihm für den Rest seines Lebens gute Dienste leisten!

Die einfachsten Tabellen sind 1 mal n und sie sind leicht zu verstehen. Beim Spielen mit ein paar Werten von n entsteht das Muster schnell. Es ist leicht, ein einfaches Ergebnis wie dieses zu unterschätzen; Jedes vollständig verstandene Ergebnis muss jedoch gefeiert werden, und dieses Ergebnis wird zu anderen führen.

<u>Ergebnis</u>: 1 x n Tisch: Der Ball wird n-1 Sprünge machen. Der Ball landet in der unteren rechten Ecke, wenn n gerade ist, und in der oberen rechten Ecke, wenn n ungerade ist.

Die nächsten einfachsten Tabellen sind 2 mal n. Die Muster hier sind etwas komplizierter. Gute Aufzeichnungen können bei so etwas einen großen Unterschied machen. Ein aufmerksamer Experimentator wird feststellen, dass sich eine 2 mal 4 Tabelle genauso verhält wie eine 1 mal 2 Tabelle und eine 2 mal 6 Tabelle wie eine 1 mal 3. Dies lässt sich schnell auf das nächste Ergebnis verallgemeinern.

<u>Ergebnis</u>: Eine 2 mal 2xn Tabelle verhält sich wie eine 1 mal n Tabelle.

Warum ist das? Was ist los? Dies ist ein mathematischer Prozess, den Sie Ihrem Kind beibringen können – suchen Sie nach Mustern und versuchen Sie dann, sie zu verstehen, und erweitern Sie mit diesem neuen Verständnis Ihre früheren Ergebnisse.

Was passiert ist, dass sich die Bounces auf einem Tisch nicht ändern, wenn Sie beide Dimensionen um denselben Faktor vergrößern. Wenn das erledigt ist, ist die Tabelle größer, aber die Geometrie ist gleich. In geometrischer Hinsicht werden die beiden Tabellen als „ähnlich“ bezeichnet.

<u>Ergebnis</u>: Eine kxm mal kxn Tabelle verhält sich genau wie eine m mal n Tabelle.

Wir sind in kleinen Schritten hierher gekommen, aber das ist ein GROßES Ergebnis. Das bedeutet, dass wir unsere Analyse für jede Tabelle beginnen können, indem wir zuerst alle gemeinsamen Faktoren entfernen.

Wir setzen dort fort, wo wir aufgehört haben für 2 mal n Tabellen. Wir verstehen, was passiert, wenn n gerade ist, aber was passiert, wenn n ungerade ist? Was passiert für 2 mal n für n = 1, 3, 5, 7 usw.? Das Muster ist schnell zu erkennen.

<u>Ergebnis</u>: Wenn n ungerade ist, hat ein 2 mal n Tisch n Bounces und landet in der oberen linken Ecke.

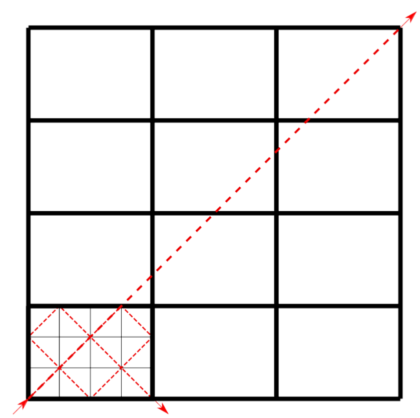
Es werden viele Fortschritte gemacht. Das Spielen mit mehr Beispielen führt zu weiteren Mustern.

<u>Ergebnis</u>: Wenn n kein Vielfaches von 3 ist, hat eine 3 mal n Tabelle n+1 Bounces und endet in der oberen rechten Ecke, wenn n bei Division durch 3 einen Rest von 1 hat, und in der unteren rechten Ecke, wenn n a . hat Rest von 2 bei Division durch 3. Wenn n ungerade ist, hat ein 4 mal n Tisch n + 2 Bounces und endet in der oberen linken Ecke. Wenn n kein Vielfaches von 5 ist, hat eine 5 mal n Tabelle n+3 Bounces und landet in der oberen rechten Ecke, wenn n ungerade ist und in der unteren rechten Ecke, wenn n gerade ist.

An dieser Stelle sind wir versucht, die Daten durchzulesen, einige Muster zu erkennen und Vermutungen anzustellen.

<u>Vermutung</u>: Angenommen, k und n haben keine gemeinsamen Faktoren. Dann hat eine ak by n Tabelle k + n - 2 Bounces. Es endet in der oberen linken Ecke, wenn k gerade ist. Es endet in der oberen rechten Ecke, wenn k ungerade und n ungerade ist, und in der unteren rechten Ecke, wenn k ungerade und n gerade ist.

Wow - wenn diese Vermutung zutrifft, haben wir dieses Problem vollständig gelöst! Du weißt, was kommt… Mal sehen, ob wir erklären können, warum diese Vermutung wahr sein sollte (oder herausfinden, dass sie falsch ist).



Obwohl es andere Möglichkeiten gibt, diese Situation zu verstehen, wie es manchmal der Fall ist, ist es eine neue Idee, die dieses Problem viel einfacher zu verstehen macht. Es mag Ihnen nicht einfallen, aber wenn Sie es einmal sehen, werden Sie wahrscheinlich erstaunt sein. Die Idee ist, den Tisch so aufklappen, dass der Ball in einer geraden Linie gehen kann! Hier ist, was passiert, wenn wir den ursprünglichen 3 x 4 Tisch aufklappen und den Weg des Balls zu einer geraden Linie machen.

Zu sehen, dass die Vermutung wahr ist, ist jetzt viel einfacher. Die Sprünge entsprechen den sich kreuzenden Linien - es müssen (k - 1) von ihnen in die eine Richtung und (n - 1) von ihnen in die andere Richtung gekreuzt werden, also zusammen ergibt das eine Summe von (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 zu kreuzende Linien. Um zu sehen, in welcher Ecke es landet, muss man den Überblick behalten, wie sich die Dinge entwickeln. Wir haben jetzt alle eine ziemlich interessante Reise hinter uns.

— Füllen von Regionen mit Formen — Einführung —

Angenommen, Sie haben ein 8 x 8-Schachbrett und eine Sammlung von 1 x 2 Kacheln. Es ist einfach, einen Weg zu finden, das Schachbrett mit 32 dieser 1 x 2 Kacheln genau zu bedecken.

Fangen wir an, einige Felder vom Schachbrett zu entfernen und sehen, was passiert. Wenn Sie eine Ecke des Schachbretts entfernen, wissen Sie sofort, dass Sie das Schachbrett nicht mehr mit Kacheln belegen können, da die Kacheln immer eine gerade Anzahl von Feldern bedecken, und es sind jetzt 63 Felder zu bedecken. Okay, entfernen Sie zwei Ecken, um eine gerade Anzahl verbleibender Quadrate zu erhalten - können Sie sie jetzt abdecken? Die Antwort hängt davon ab, welche zwei Ecken Sie entfernen. Wieso den? Was passiert, wenn Sie sich nicht mehr auf das Entfernen von Ecken beschränken, was passiert dann?

— Füllen von Regionen mit Formen — Analyse —

Lassen Sie Ihr Kind damit spielen, bevor Sie die Farbidee enthüllen. Wenn sie mit kleinen Brettern herumspielen, können sie die Regel selbst entdecken, und das ist immer besser.

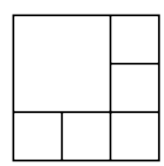
Eine Beobachtung, die bei dieser Frage sehr hilft, ist die Farbgebung der Schachbrettfelder. Wenn Sie die 1 x 2 Kacheln nehmen und ein Quadrat weiß und das andere schwarz färben, werden Sie sehen, dass etwas Interessantes passiert. Jedes Plättchen muss ein Quadrat jeder Farbe abdecken. k Kacheln bedecken nicht nur 2xk Quadrate, sondern auch k weiße Quadrate und k schwarze Quadrate – die gleiche Anzahl von Quadraten jeder Farbe. Mit dieser Idee wird es offensichtlich, dass es unmöglich ist, das Brett zu bedecken, wenn Sie mehr Felder einer Farbe entfernen als eine andere.

Wenn Ihrem Kind diese Fragen gefallen, beginnen Sie damit, andere Formen zu verwenden, um die Tafel zu füllen. Spielen Sie herum, indem Sie es mit 1 x 3 Kacheln oder mit 3 Quadraten in L-Form füllen. Welche Muster und Regeln entdecken Sie dabei? Welche anderen Formen könnten interessant sein, damit zu spielen?

— Quadrate mit Quadraten — Einführung —

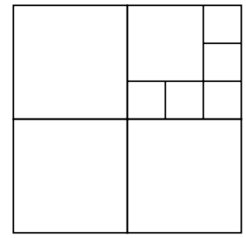
Füllen Wie kann man ein Quadrat mit anderen Quadraten füllen, wobei die anderen Quadrate nicht alle gleich groß sein müssen? Die Längen können jedoch keine völlig zufälligen Zahlen sein – die Seitenlänge des Quadrats muss ein ganzzahliges Vielfaches einer festen Länge sein. Die zu untersuchende Frage lautet: Wie viele Quadrate sind möglich? Wenn Sie wissen, dass eine Zahl möglich ist, gibt es eine einfache Möglichkeit, die Vorgehensweise zu beschreiben?

Lassen Sie Ihr Kind viele Tage damit spielen und beeilen Sie sich nicht, die Antwort zu finden. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, Ideen für diese Untersuchung zu entwickeln. Seien Sie also flexibel und arbeiten Sie mit den Ideen Ihres Kindes. Hier ist ein Diagramm, das zeigt, wie 6 möglich ist.



Es ist immer eine gute Idee, einige schnelle Beispiele zu finden. Das große Quadrat in gleich große Quadrate zerlegen, um einen einfachen Anfang zu haben. Daraus wissen Sie, dass die Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, …) alle funktionieren.

Ausgehend vom Beispiel mit 6 Quadraten können wir ein großes Quadrat beliebiger Größe verwenden und auf zwei seiner Seiten 1 x 1 Quadrate platzieren. Damit erhalten wir für immer größere Quadrate (1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3, …) 1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6 (wie abgebildet), 1 + 7 = 8, 1 + 9 = 10 , und so weiter. So können alle geraden Zahlen, die mit 4 beginnen, auf diese Weise durchgeführt werden.



Eine leistungsstarke Idee, die dies schnell abschließt, besteht darin, zu sehen, dass wir ein funktionierendes Diagramm nehmen und eines seiner Quadrate durch ein anderes funktionierendes Diagramm ersetzen können. Wenn Sie also zum Beispiel ein einfaches 2 mal 2 mit 4 1 mal 1 Quadraten gefüllt nehmen und eines dieser 1 mal 1 Quadrate durch das 6 Quadrate Beispiel ersetzen, erhält man das rechts gezeigte Diagramm mit 9 Quadraten.

Da ein Quadrat durch ein n-Quadrat-Diagramm ersetzt wird, besteht die Netto Änderung in der Anzahl der Quadrate darin, n-1 davon hinzuzufügen. Das bedeutet, dass wir eine funktionierende Zahl nehmen und ein Vielfaches von eins weniger zu jeder anderen funktionierenden Zahl addieren können. Insbesondere können wir Vielfaches von 4 -1 = 3 bis jede andere Zahl, die Werke hinzufügen - die einfach diejenigen 3 hinzufügen zu beginnen alle geraden Zahlen mit 4.

Putting Dass alle zusammen sagt dass die Zahlen 1, 4, 6, 7, 8, 9, … alle funktionieren, und es ist leicht, zumindest eine einfache Möglichkeit zu erkennen, sie zu konstruieren. Es ist auch leicht, sich selbst davon zu überzeugen, dass 2, 3 und 5 unmöglich sind.

Wenn Ihr Kind diese Frage gerne untersucht, erkunden Sie Variationen dieses Themas. Angenommen, Sie lassen nur Quadrate bestimmter Größen zu - wie 1 x 1, 2 x 2 und 3 x 3. Oder vielleicht nur 2 x 2 und 3 x 3. Sehen Sie, welche Fragen zu interessanten Ergebnissen führen und welche nicht so interessant sind .

Eine andere Richtung, die man sich ansehen sollte, ist das Füllen anderer Figuren mit Figuren, die die gleiche Form haben. Stellen Sie zum Beispiel die gleiche Frage für regelmäßige Dreiecke (Dreiecke mit allen Seiten gleich lang). Manche Zahlen sind auf diese Weise interessant zu untersuchen, andere überhaupt nicht – welche?

Kapitel 5 — Produktspiel

— Einführung —

Verwenden Sie ein gemeinsames Blatt Papier, das wie folgt ausgefüllt ist:

Der erste Spieler bewegt einen Spielstein auf eine beliebige Zahl von 1 bis 9 in den Feldern 1-9 in der unteren Reihe. Der zweite Spieler legt einen weiteren Marker auf eines der Felder 1-9 in der unteren Reihe und beansprucht das Produkt im 6-mal-6-Raster. Von da an entscheidet sich jeder Spieler, einen der beiden Spielsteine zu bewegen und das Produkt zu beanspruchen (wenn er kann). Der erste Spieler, der 3 Felder in Folge beansprucht, gewinnt. Mischen Sie die Produktnummern im 6-mal-6-Raster, um Ihrem Kind die Identifizierung der Produkte zu erleichtern.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Diese Spielbretter können beliebig groß gemacht werden, obwohl sie ziemlich schnell ziemlich groß werden. Hier sind ein paar größere Boards mit den entsprechenden größeren Nummernkreisen darunter.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Die Quadrate mit roten Sternen sind „freie“ Quadrate und können nach Bedarf von beiden Seiten genutzt werden.

Kapitel 5 — Eingeschränkte Taschenrechner

— Einführung —

Angenommen, Sie haben einen stark kaputtem Taschenrechner und werden aufgefordert, ein Ergebnis auf dem Taschenrechner zu erzeugen. Sie können sich eine Vielzahl von Szenarien ausdenken, die mit einer kurzen Rätsel Beschreibung interessante Herausforderungen bieten können. Diese Aktivität ist einfach mündlich zu spielen, wenn Sie einen freien Moment haben. Hier sind einige Beispiele, um Ihnen den Einstieg zu erleichtern.

Obwohl es einige Momente gibt, in denen diese Fragen tiefer mathematisch behandelt werden, handelt es sich meistens um Probleme, die ausschließlich dem Spaß am Herumspielen dienen.

1a) Angenommen, Sie hätten einen Taschenrechner mit +, -, x und /, aber nur einer funktionierenden Zifferntaste, der 4. Könnten Sie das Ergebnis 21 erhalten? Wenn ja, wie viele Schritte würden Sie am wenigsten benötigen?

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21 ist eine Möglichkeit, aber es gibt viele andere Möglichkeiten. Ein anderer ist 4 x (4 + 4/4) + 4/4. Das Ziel ist es, herumzuspielen und die Erkundung zu genießen.

1b) Angenommen, Sie könnten 4 höchstens viermal verwenden – welche Zahlen könnten Sie produzieren? Angenommen, Sie müssten die 4 genau viermal verwenden.

Wenn die mathematischen Ressourcen eines Kindes zunehmen, ist das Problem der Vier 4 ein lustiges Rätsel. Zu diesem Zeitpunkt sind die Auswahlmöglichkeiten Ihres Kindes ziemlich begrenzt, aber es macht immer noch viel Spaß, damit herumzuspielen. Es wird besonders schwierig sein, viele der Zahlen ohne Division oder Dezimalzahlen zu machen. Machen Sie sich keine Sorgen, alle Zahlen in der richtigen Reihenfolge zu finden - denken Sie sich einfach so viele verschiedene Zahlen wie möglich aus.

Hier sind ein paar Beispiele, um Ihnen den Einstieg zu erleichtern.

1 = (4/4) x (4/4) = 44 / 44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4 - 4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44 / 4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) Spielen Sie damit, andere einzelne Zahlen zu haben und andere Ergebnisse zu erzielen.

2a) Angenommen, Ihr Taschenrechner könnte nur 4 oder 7 addieren. Welche Zahlen könnten Sie produzieren?

Das ist das Ergebnis, das wir mittlerweile schon mehrfach gesehen haben. Beginnend bei (4 - 1) x (7 - 1) können Sie alle Zahlen durch Addition von Vielfachen von 4 und 7 erreichen. 18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7 usw.

2b) Angenommen, es hätte 4 oder 7, aber es könnte addieren und subtrahieren. Welche Zahlen könnten Sie produzieren?

Auf diese Weise können Sie alle Zahlen erzeugen.

2c) Ersetzen Sie 4 und 7 durch andere Zahlenpaare. Was passiert mit diesen Paaren?

In der Zahlentheorie wird dies als Theorem von Bezout bezeichnet. Das Ergebnis besagt, dass man durch Kombinieren von Vielfachen zweier Zahlen ein beliebiges Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers der beiden Zahlen erzeugen kann.

3) Angenommen, Sie hätten nur einen 1-Schlüssel und könnten nur addieren oder verdoppeln. 2 x (2 x 1) + 1 ist beispielsweise 5. Welche anderen Zahlen können Sie erstellen?

Dies ist eine Frage zu verkleideten Binärzahlen. Es ist nicht wichtig, dass Ihr Kind dies erkennt oder versteht, es ist nur zum Spielen da. Jede Zahl kann binär geschrieben werden, also können alle Zahlen durch die Kombination von Verdoppelung und Addition von 1 erreicht werden. Zum Beispiel ist 21 16 + 4 + 1. Also, 21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

Kapitel 5 — Doppelt oder Nichts

— Einführung —

Die Spieler beginnen das Spiel, indem sie heimlich 5 verschiedene Zahlen auswählen, die größer als 20 und nicht größer als 120 sind. Nachdem sie ausgewählt wurden, werden sie dort geschrieben, wo alle können sieh sie. Mit Zahlenkarten oder einem anderen Gerät wird eine Zufallszahl von 1 bis 20 erstellt. Diese Zahl wird wiederholt verdoppelt, bis entweder die Zahl einer Person zum ersten Mal getroffen wird oder die Zahl größer als 120 wird. Der erste Spieler, der alle fünf Zahlen getroffen hat, ist der Gewinner.

— Analyse —

Die Frage ist: Welche fünf Zahlen sind am besten zu wählen? Hier sind einige Ideen zum Nachdenken.

Regel: Wählen Sie immer eine Zahl, die eine Zweierpotenz von 1 bis 20 ist.

Wenn Sie eine Zahl wie 23 oder 46 wählen, können sie nie getroffen werden und Sie verlieren garantiert.

Regel: Wählen Sie niemals eine Zahl, die doppelt so groß ist wie eine andere Zahl, die Sie hätten wählen können, es aber nicht getan haben.

Wenn Sie 44 wählen, warum nicht stattdessen 22 wählen? Wenn die andere Person 22 wählt, verpassen Sie eine Runde.

Weitere Analyse: Die Zahlen von 1 bis 20 werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt. Da 9 jedoch zu 18 führt, ist 18 als Ausgangspunkt doppelt so wahrscheinlich wie beispielsweise 11. Kombiniert man die verschiedenen Startmöglichkeiten, ergeben sich für die Startpunkte folgende Wahrscheinlichkeiten:

11 - 1/20 (von 11)

12 - 3/20 (von 3, 6 und 12)

13 - 1/20 (von 13)

14 - 2/20 (ab 7 und 14)

15 - 1/20 (ab 15)

16 - 5/20 (ab 1, 2, 4, 8 und 16)

17 - 1/20 (ab 17)

18 - 2 /20 (von 9 und 18)

19 - 1/20 (von 19)

20 - 3/20 (von 5, 10 und 20)

Die besten Zahlen sind eindeutig Vielfache von 16, 12 und 20. Eine einfache Strategie besteht darin, die fünf Zahlen zu verwenden: 32, 64, 24, 48 und 40. Diese Zahlen werden nicht immer gewinnen, aber sie sollten mit der Zeit sehr gut für Sie sein.