Matemáticas Tempranas en Familia

Early Family Math

Capítulo 5 Material adicional

— Introducción —

¿Es usted alguien que desea que haya más ejemplos, discusiones y comentarios en las descripciones intencionalmente breves de las lecciones? Si es así, ¡usted ha venido al lugar correcto! Este archivo contiene material adicional para algunas de las actividades del Capítulo 5.

Para los juegos, se dan muchos ejemplos resueltos, junto con comentarios adicionales sobre cómo crearlos. El programa Early Family Math se basa en la idea de que las matemáticas tempranas son algo que una familia debe hacer en conjunto, y crear juegos para que su niño/niña los resuelva con usted es una parte importante de ese proceso. Una vez que domine cada juego, descubrirá que la mayoría, si no todos, son bastante fáciles de crear.

Muchos de estos juegos tienen diferentes niveles de dificultad, y en las próximas páginas hay muchas sugerencias y ejemplos sobre cómo crear esos niveles. Empiece siempre con los juegos más fáciles. Es mucho mejor que su niño/niña experimente el éxito, la comprensión y la diversión con juegos que son demasiado fáciles, a que se sienta frustrado, desanimado y desafiado por juegos que son demasiado difíciles. Una vez que su niño/niña desarrolle confianza y entusiasmo por una actividad matemática, es el momento de incorporar lentamente desafíos mayores. Además, no todos los juegos serán divertidos para todos, así que no fuerce juegos y actividades que simplemente no parecen encajar.

Esto es lo que encontrará en las siguientes páginas:

- **Capítulo 5 — Nim con factores**
- **Capítulo 5 — Tamiz de Eratóstenes**
- **Capítulo 5 — Palancas y móviles**
- **Capítulo 5 — Divide la caja**
- **Capítulo 5 — Juegos de sustitución de letras**
- **Capítulo 5 — Investigaciones - Jugando con figuras**
- **Capítulo 5 — Juego de productos**
- **Capítulo 5 — Calculadoras limitadas**
- **Capítulo 5 — Doble o nada**

Capítulo 5 — Nim con factores

— Introducción —

Empiece con cualquier número, digamos 20. Deje que el niño decida si va primero o segundo. Durante su turno, un jugador puede restar cualquier divisor del número. El jugador obligado a llegar a 0 pierde.

— Análisis —

Como es habitual, una buena estrategia para aprender sobre este juego es observar una versión más simple del juego, que en este caso significa comenzar con números muy pequeños. Si es su turno y se enfrenta con cada uno de estos números, esto es lo que sucederá: 1 - pierde, 2 - gana, 3 - pierde, 4 - gana, 5 - pierde, 6 - gana, 7 - pierde y 8 - gana. A estas alturas, el patrón es claro: si es su turno y tiene un número impar, perderá; si tiene un número par, ganará.

Encontrar la estrategia ganadora es un gran paso, pero profundicemos. ¿Por qué funciona esto? ¿Cuáles son las propiedades de los números pares e impares que crean esta situación? Plantee esta pregunta a su niño/niña y déle mucho tiempo para pensar en ella y experimentar con ella; no hay prisa, y este proceso de batallar con una pregunta es invaluable y no debe ser acortado.

Un poco de experimentación con números pequeños revela rápidamente lo que está sucediendo. Si tiene un número impar, todos los divisores son impares, por lo que cuando resta cualquier divisor, el resultado es un número par. En consecuencia, los números impares en un turno siempre conducen a un número par en el siguiente turno. Los números pares siempre tienen números pares e impares como divisores. Entonces, la situación no es la misma. Sin embargo, si tiene un número par, su objetivo es darle a su oponente un número impar, y hay una manera fácil de hacerlo: ¡seleccione el divisor 1 y réstelo!

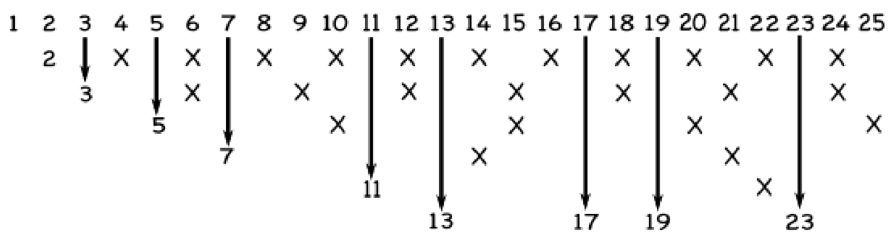
Capítulo 5 — Tamiz de Eratóstenes

— Introducción —

Comience con una recta numérica numerada del 1 al 25 - o un rango mayor si el espacio y su paciencia lo permiten.

Escriba el número 2 debajo de sí mismo. En la misma línea de este 2, coloque una X debajo de cada múltiplo de 2.

Ahora, baje el primer número sin X debajo de sí mismo (3 en este caso) y colóquelo en la siguiente línea. Escriba el 3 y ponga una X en esa línea para todos sus múltiplos. Continúe de esta manera. Al final, habrá eliminado todos los *números primos*. ¡Recuerde que 1 es una *unidad* y no un primo!



— Análisis —

Este sencillo proceso revela algunos datos interesantes sobre los números primos. Vea si su niño/niña puede plantear algunas de estas preguntas; sin embargo, si no surgen de forma natural, aquí hay algunas preguntas para hacer.

1) ¿Por qué los números que bajan son primos?

Suponga que tiene un número compuesto. Queremos mostrar que este número tendrá una X debajo. Al ser compuesto, es divisible por algún número, n, entre 1 y ese número. Si n es primo, entonces nuestro número compuesto tendría una X debajo ya que n sería un primo anterior. Si n no es un primo, entonces tiene una X debajo de algún primo anterior, llámelo p. Ahora, p divide uniformemente n y n divide uniformemente nuestro nuevo número, por lo que p debe dividir nuestro nuevo número. En consecuencia, al marcar los múltiplos de p, se habría colocado una X debajo de nuestro nuevo número.

2) Cuando coloca X para los múltiplos de un primo, hay algunos números que ya tienen una X de un primo anterior. ¿Cuándo sucede eso y cuándo no sucede?

Veamos los múltiplos de 5 en el tamiz de arriba. Los múltiplos de 5 x 2, 5 x 3 y 5 x 4 ya están tachados. Solo 5 x 5 es nuevo. Esto sucede porque 5 x 2, 5 x 3 y 5 x 4 son todos múltiplos de 2 y 3, primos anteriores. Si queremos poner X en lugares nuevos, debemos multiplicar 5 por números que solo tienen factores primos que son 5 o más. Debido a que es un poco tedioso hacer un seguimiento de todo eso, lo que algunas personas hacen es solo tachar los múltiplos impares y dejarlo así.

3) Para este tamiz, ¿cuál fue el último número primo que tenía una nueva X útil en su fila?

En este tamiz, los números primos con X útiles son 2, 3 y 5. Los múltiplos de 7 y 11 tenían todos Xs previas. Si observa la respuesta a la última pregunta, verá la respuesta aquí. La única forma de obtener nuevas Xs es multiplicando un número primo por números primos mayores o iguales a sí mismo. Una vez que llegamos a un primo como 7 donde 7 x 7> 25, no necesitamos verificarlo. Entonces, solo necesitamos verificar los números primos cuyo cuadrado sea menor o igual que el último número.

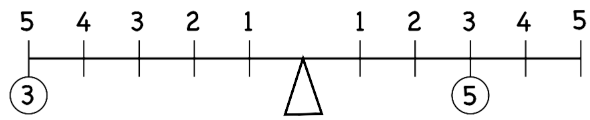
4) Si le dieran un número, digamos 53, ¿entre qué primos necesitaría dividirlo para ver que es primo?

De acuerdo a la respuesta de la última pregunta, solo necesitamos verificar los números primos cuyo cuadrado sea menor o igual a 53. Esos números primos son 2, 3, 5 y 7; ninguno de estos divide 53 de manera uniforme, por lo que 53 debe ser primo.

Capítulo 5 — Palancas y móviles

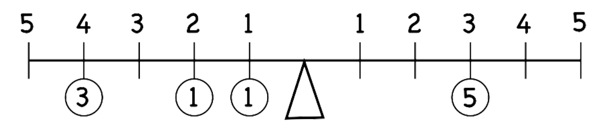
— Palancas —

El principio de la palanca establece que la fuerza ejercida en un lado de una palanca por una masa es igual a la masa multiplicada por su distancia desde el punto de pivote, el fulcro.



En la palanca de arriba, el 3 del lado izquierdo está a una distancia de 5 del fulcro, por lo que su fuerza es 3 x 5 = 15. El 5 del lado derecho está a una distancia de 3 del fulcro, por lo que su fuerza es 5 x 3 = 15. Esta palanca está en equilibrio.

Si hay más de un peso en un lado, las fuerzas se sumarán.



En esta palanca, hay 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15 en el lado izquierdo y 5 x 3 = 15 en el lado derecho. Entonces está en equilibrio.

Limitaremos estos problemas para usar solo números enteros. Puede decidir si permite que se cuelguen varios pesos del mismo punto; asumiremos que está bien usar varios pesos en la discusión que sigue.

— Juegos de palanca —

Tiene un peso de 3 unidades y un peso de 5 unidades para colocar en lados opuestos del fulcro. ¿Dónde deben colocarse para equilibrarse? La respuesta a esto pueden ser las distancias 5 y 3, pero también pueden ser 10 y 6, o incluso respuestas más grandes como 15 y 9. Esté dispuesto a discutir lo que se le ocurra a su niño/niña.

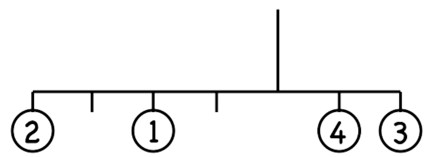
Si tiene un peso de 3 unidades y uno de 5 unidades para poner en un lado de una palanca, ¿qué pesos puede colocar y a qué distancias del otro lado? Esta pregunta continúa con las preguntas de la página Haz que cuente al final del Capítulo 4. Como antes, explore las diferentes combinaciones de pesos. ¿Qué sucede si 3 y 5 se reemplazan por 4 y 5, 4 y 9, o 6 y 9?

¿Cómo cambia este último problema si colocamos los pesos de 3 y 5 unidades en lados opuestos del fulcro? Ahora es fácil pesar un peso de 1 unidad usando 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1. ¿Qué otros pesos puede pesar de esta manera?

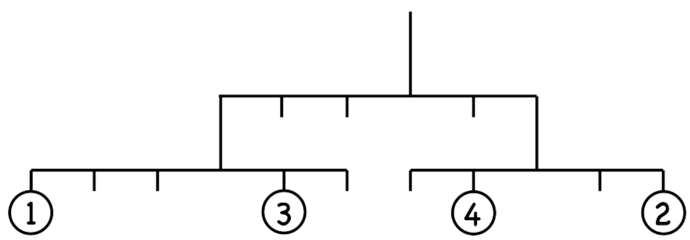
— Móviles —

Se le dan algunos pesos y un diseño para un móvil que tiene algunos puntos de sujeción. El desafío es poner como máximo un peso por punto de sujeción para que el móvil se equilibre a lo largo de cada brazo. Para estos problemas, asumiremos que los cables que crean el móvil no tienen peso. Cada brazo del móvil es una palanca que debe equilibrarse, por lo que estos juegos son una extensión de la actividad Balance de palanca; practique con esos juego antes de comenzar con estos.

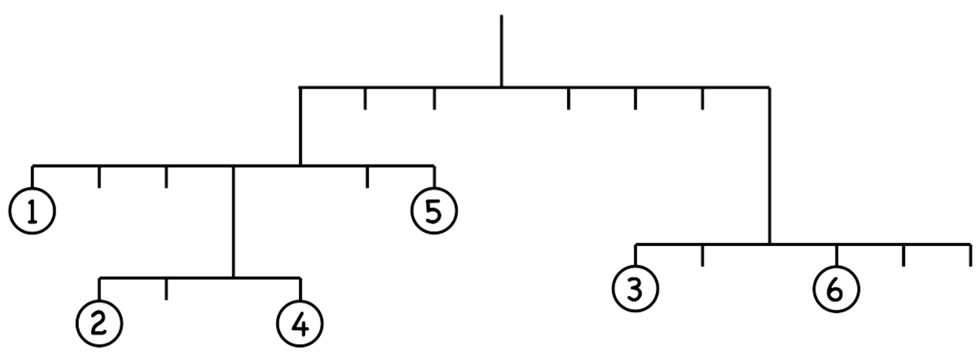
Comience con los móviles más sencillos, que son solo palancas en el aire. Aquí hay una solución para poner los pesos de 1 a 4 en este móvil para equilibrarlo. Esto funciona como una palanca con el fulcro en el punto de suspensión. Para este móvil tenemos 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2.



Si hay más de un nivel en el móvil, entonces cada brazo individual en cada nivel debe equilibrarse como una palanca. Para este próximo móvil, los dos brazos inferiores se equilibran porque 1 x 3 = 3 x 1 y 4 x 1 = 2 x 2. Para el siguiente nivel, simplemente sume los pesos debajo de él. Por ejemplo, el peso en el lado izquierdo es 1 + 3 = 4; en lo que respecta al siguiente nivel, no importa en qué parte del brazo inferior estén ubicados los pesos. Entonces, para el siguiente nivel, (1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12, por lo que el nivel superior también se equilibra.



Diviértanse haciendo juegos móviles entre ustedes. Aquí hay un último para jugar usando cada uno de los números del 1 al 6. No se preocupe por ser elegante y usar cada número una vez. Cualquier juego completado será divertido. Comprobando los niveles tenemos: 2 x 2 = 4 x 1; 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2; 3 x 2 = 6 x 1; y (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4.



Capítulo 5 — Dividir la caja

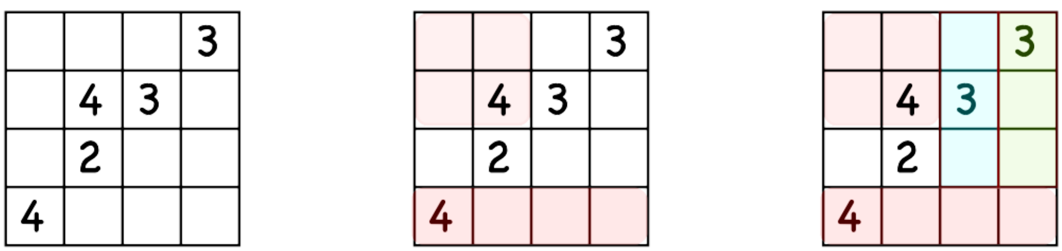
— Introducción —

Se divide un rectángulo de 4 por 4 o más grande, con números en algunos de sus cuadrados, en rectángulos más pequeños. Cada número debe terminar en un rectángulo separado cuya área sea ese número.

Para los adultos, la creación de estos juegos es bastante simple. Tome un rectángulo, divida su interior en rectángulos, coloque números para las áreas dentro de cada rectángulo interior y luego elimine cualquier indicio de los rectángulos interiores. La única parte complicada es poner números en lugares que hagan que el juego sea razonablemente fácil de resolver; siempre puede dar pistas según sea necesario si su juego termina siendo demasiado difícil.

— Estrategias de resolución —

Aquí hay algunas estrategias generales que pueden simplificar la resolución de estos acertijos. Haga todo lo posible para que su niño/niña descubra estas reglas mientras juega. Hagan juntos una lista de las reglas que se les ocurran.



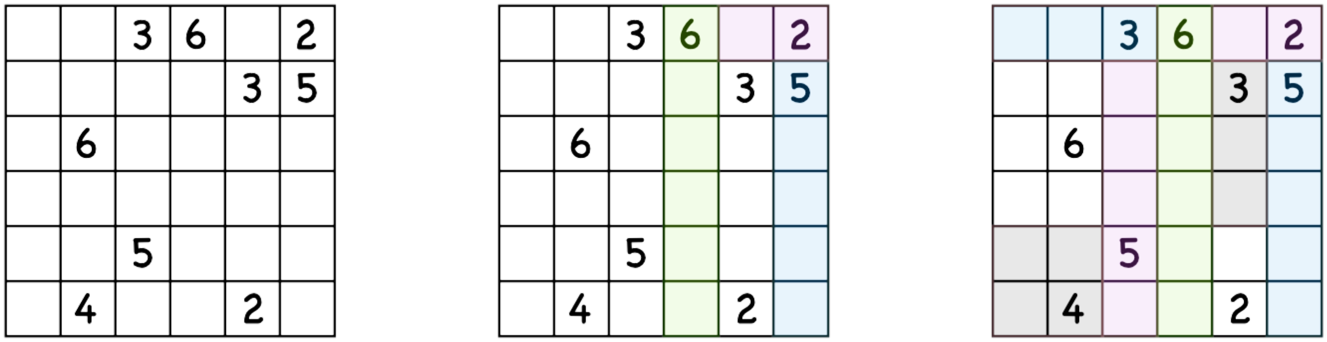
1) Fíjese en los números con solo una o dos opciones para sus rectángulos.

Ambos 4 están muy restringidos. Cada 4 solo puede estar dentro de un rectángulo de 1 por 4 o de 2 por 2. El 4 superior está acorralado, por lo que no puede estar dentro de un 1 por 4. Por lo tanto, debe haber un rectángulo de 2 por 2 en la esquina superior izquierda. Eso deja al 4 inferior solo con la posibilidad de que su rectángulo sea de 1 por 4 y que vaya a lo largo del lado inferior.

2) Observe los números primos: deben estar dentro de un rectángulo de 1 por n.

Los 3 en el juego de arriba deben estar contenidos en un rectángulo de 1 por 3. El 3 en la esquina superior derecha solo puede ser parte de un rectángulo de 1 por 3 que va a lo largo del borde superior o del lado derecho. El cuadrado superior izquierdo de 2 por 2 bloqueado para el 4 hace que sea imposible tener un 1 por 3 a lo largo del borde superior.

El 1 por 4 a lo largo de la parte inferior obliga al 1 por 3 para que el más bajo de los dos 3 sea el más alto de las dos posibilidades verticales.



3) Los números cercanos a la dimensión máxima a menudo tienen pocas opciones.

Mira los 6 y los 5 en este siguiente rompecabezas. El 6 superior necesita mucho espacio, y la única forma en que hay suficiente espacio para él es verticalmente hacia abajo, usando toda la columna. Los otros 6 no pueden ser 1 x 6 porque la fila fue cortada por la columna del otro 6. Por lo tanto, el 6 inferior debe ser un 2 x 3, lo que aún no está determinado.

Como otro ejemplo, si hubiera habido un 8 en este rompecabezas, 1 por 8 no habría encajado, por lo que tendría que ser parte de un rectángulo de 2 por 4.

4) Los cuadrados encasillados tienen pocas opciones.

El 5 superior está encasillado, por lo que su única opción es estar en una columna de 5 cuadros. El otro 5, por ser también primo, debe ir vertical u horizontalmente. Está cortado horizontalmente por la columna del 6, por lo que debe ir verticalmente hasta justo debajo del 3.

5) Las esquinas suelen estar muy limitadas.

El 2 en la esquina superior derecha debe ir horizontalmente, por lo que es fácil de completar.

Capítulo 5 — Juegos de sustitución de letras

— Introducción —

Una vez que su niño/niña se sienta cómodo con los juegos de números faltantes de algunas páginas anteriores en este capítulo, puede comenzar a jugar con estos juegos. En estos, uno o más de los dígitos se reemplazan por letras. Las tres reglas para las letras son:

- Una letra dada es siempre el mismo dígito.
- El dígito más a la izquierda de un número nunca es 0.
- Las letras diferentes deben ser dígitos diferentes.

Cree estos juegos tomando un problema de suma o resta y reemplazando uno o más de los dígitos. Los juegos también se pueden crear para hacer desafíos de resolución de problemas interesantes para su niño/niña. Tenga en cuenta que los valores de las letras no se transfieren de un juego a otro.

— Ejemplos —

Este primer ejemplo ilustra cómo se puede tomar un problema estándar de suma o resta y hacer un acertijo de sustitución de letras a partir de él. La primera versión reemplaza todos los 6 con A, y la segunda versión reemplaza los 2 con B.

```
  23         23    B3
+46  --->  +4A   +4A
----       ----  ----
  69         A9    A9
```

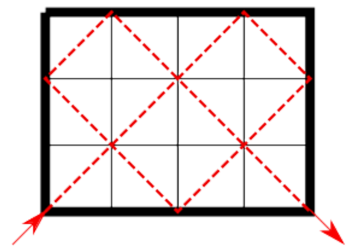
El resto de estos ejemplos se construyeron cuidadosamente para permitir la resolución utilizando propiedades de la situación particular. Una propiedad a tener en cuenta es que cuando suma dos números, el acarreo a la siguiente columna es siempre 0 o 1. Entonces, por ejemplo, en el problema A + A = C4, C debe ser 1 porque no puede ser 0.

```
   B     B     A     A     D     A
  +8    +B    +A    +2    +2    +B
  --    --    --    --    --    --
   C     8    C4    BC    EE    AC

   A     C     A     A
   A     C     A     A     A     B
  +A    +C    +7    +B   +BB   +AB
  --    --    --    --   ---   ---
  B2    D4     B    B0    A7    BA

   BA    AD    AA    AA    AA    AA
  +BB   +BD   +BA   +CB   +AB   +AA
  ---   ---   ---   ---   ---   ---
  CAB   BCC   BBC   BBC   CAC   BBC
```

Capítulo 5 — Jugando con figuras

— Bola de billar que rebota — Introducción —

Imagine una mesa de billar que tiene una bolsa en cada esquina. Cuando una pelota rebota en el costado de la mesa, rebota en el mismo ángulo en el que entró. Si disparamos una pelota en un ángulo de 45 grados desde la esquina inferior izquierda, ¿dónde terminará? La respuesta depende del tamaño de la mesa. En la imagen de la derecha se muestra lo que sucede en una mesa de 3 por 4.



Dele a su niño/niña un dibujo de una mesa y desafíe a su niño/niña a predecir qué esquina se atinará primero y cuántos rebotes se necesitarán antes de llegar a esa esquina.

— Bola de billar que rebota — Análisis —

Empiece por dejar que su niño/niña juegue con esto y no se apresure a descubrir los resultados. Como verá, este problema implica algunas ideas sofisticadas para una persona joven. Según sea necesario, haga una pregunta o dos para darle un poco más de estructura a su pensamiento. Ya sabe lo que sigue; mire primero las mesas más simples para buscar patrones; cuando esta idea se vuelva automática para su niño/niña, ¡esto le servirá bien por el resto de sus vidas!

Las mesas más simples son 1 por n, y son fáciles de entender. Jugando con algunos valores de n, el patrón emerge rápidamente. Es fácil subestimar un resultado simple como este; sin embargo, cualquier resultado entendido completamente debe celebrarse, y este resultado conducirá a otros.

<u>Resultado</u>: Mesa 1 por n: La pelota tomará n-1 rebotes. La bola terminará en la esquina inferior derecha si n es par y en la esquina superior derecha si n es impar.

Las siguientes mesas más simples son de 2 por n. Los patrones aquí están un poco más complicados. Un buen registro puede marcar una gran diferencia en algo como esto. Un observador experimentado notará que una mesa de 2 por 4 se comporta como una mesa de 1 por 2, y una mesa de 2 por 6 como una de 1 por 3. Esto se generaliza rápidamente al siguiente resultado.

<u>Resultado</u>: Una mesa de 2 por 2xn se comporta como una mesa de 1 por n.

¿Por qué es esto? ¿Qué está pasando? Este es un proceso matemático para inculcar en su niño/niña: busque patrones y luego intente comprenderlos, y con esa nueva comprensión amplíe sus resultados anteriores.

Lo que está sucediendo es que los rebotes en una mesa no cambian si agranda ambas dimensiones por el mismo factor. Una vez hecho esto, la mesa es más grande pero la geometría es la misma. En términos de geometría, se dice que las dos mesas son "similares".

<u>Resultado</u>: Una mesa de kxm por kxn se comporta exactamente como una mesa de m por n.

Hemos llegado hasta aquí en pequeños pasos, pero este es un GRAN resultado. Significa que podemos comenzar nuestro análisis en cualquier mesa eliminando primero cualquier factor común.

Reanudamos donde quedamos para mesas de 2 por n. Entendemos lo que sucede cuando n es par, pero ¿qué sucede cuando n es impar? ¿Qué sucede para 2 por n cuando n = 1, 3, 5, 7, etc.? El patrón se vuelve fácil de ver rápidamente.

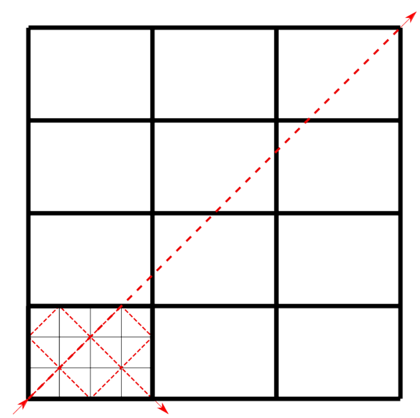
Resultado: Cuando n es impar, una mesa de 2 por n tiene n rebotes y termina en la esquina superior izquierda.

Se están logrando muchos avances. Jugar con más ejemplos conduce a más patrones.

Resultado: Si n no es un múltiplo de 3, una mesa de 3 por n tiene n + 1 rebotes y termina en la esquina superior derecha si n tiene un residuo de 1 cuando se divide entre 3, y en la esquina inferior derecha si n tiene un residuo de 2 cuando se divide entre 3. Si n es impar, una mesa de 4 por n tiene n + 2 rebotes y termina en la esquina superior izquierda. Si n no es múltiplo de 5, una mesa de 5 por n tiene n + 3 rebotes y termina en la esquina superior derecha cuando n es impar y en la esquina inferior derecha cuando n es par.

En este punto, nos sentimos tentados a revisar los datos, ver algunos patrones y hacer algunas conjeturas.

Conjetura: Suponga que k y n no tienen factores en común. Entonces una mesa de k por n tendrá k + n - 2 rebotes. Terminará en la esquina superior izquierda si k es par. Terminará en la esquina superior derecha si k es impar y n es impar, y en la esquina inferior derecha si k es impar y n es par.



Vaya, si esta conjetura es cierta, ¡hemos resuelto completamente este problema! Ya sabe lo que viene… Veamos si podemos explicar por qué esta conjetura debería ser cierta (o descubramos que es falsa).

Aunque existen otras formas de entender esta situación, como ocurre a veces, lo que hace que este problema sea mucho más fácil de entender es una idea nueva. Puede que no se le ocurra, pero una vez que lo vea, probablemente se sorprenderá. ¡La idea es desplegar la mesa para que la bola pueda ir en línea recta! Esto es lo que sucede si desplegamos la mesa original de 3 por 4 y hacemos que la trayectoria de la bola sea una línea recta.

Ver que la conjetura es cierta es mucho más fácil ahora. Los rebotes corresponden a líneas de cruce: hay (k - 1) de ellos para cruzar en una dirección y (n - 1) de ellos para cruzar en la otra dirección, por lo que juntos hacen un total de (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 líneas para cruzar. Ver en qué esquina termina es una cuestión de hacer un seguimiento de cómo se extienden las cosas. Ya hemos terminado con un viaje bastante interesante.

— Llenando regiones con formas — Introducción —

Suponga que tiene un tablero de ajedrez de 8 por 8 y tiene una colección de fichas de 1 por 2. Encontrar una manera de cubrir exactamente el tablero de ajedrez con 32 de estas fichas de 1 por 2 es bastante simple.

Comencemos a quitar algunos cuadrados del tablero de ajedrez y veamos qué sucede. Si quita una esquina del tablero de ajedrez, sabrá inmediatamente que ya no puede cubrir el tablero de ajedrez con fichas porque las fichas siempre cubrirán un número par de casillas y ahora hay 63 casillas por cubrir. De acuerdo, quita dos esquinas para hacer un número par de cuadrados restantes, ¿puede cubrirlo ahora? La respuesta depende de las dos esquinas que elimine. ¿Por qué? ¿Qué pasa si ya no se limita a quitar esquinas, qué pasará entonces?

— Llenando regiones con figuras— Análisis —

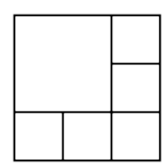
Deje que su niño/niña juegue con esto antes de revelar la idea de colorear. Si juegan con tableros pequeños, es posible que descubran la regla por sí mismos, y eso siempre es mejor.

Una observación que ayuda mucho con esta pregunta es colorear los cuadrados del tablero de ajedrez. Si toma las fichas de 1 por 2 y colorea un cuadrado de blanco y el otro de negro, verá que ocurre algo interesante. Cada ficha debe cubrir un cuadrado de cada color. Las fichas k no solo cubrirán los cuadrados 2xk, sino que cubrirán k cuadrados blancos y k cuadrados negros, la misma cantidad de cuadrados de cada color. Usando esta idea, resulta obvio que si quita más cuadrados de un color que de otro, será imposible cubrir el tablero.

Si su niño/niña disfruta con estas preguntas, comience a usar otras figuras para llenar el tablero. Juegue llenándolo con fichas de 1 por 3 o con 3 cuadrados en forma de L. ¿Qué patrones y reglas descubre con estos? ¿Con qué otras figuras podría ser interesante jugar?

— Relleno de cuadrados con cuadrados — Introducción —

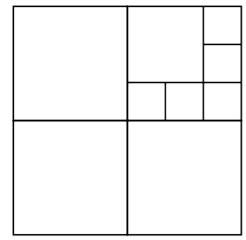
¿De qué manera se puede llenar un cuadrado con otros cuadrados, donde los otros cuadrados no tienen que ser todos del mismo tamaño? Sin embargo, las longitudes no pueden ser números totalmente aleatorios; la longitud del lado de cada cuadrado debe ser un múltiplo de un número entero de una longitud fija. La pregunta a investigar es: ¿Cuáles son todos los números de cuadrados que son posibles? Además, si sabe que un número es posible, ¿hay una manera fácil de describir cómo hacerlo?



Deje que su niño/niña juegue durante muchos días y no se apresure a encontrar la respuesta. Hay muchas formas diferentes de proponer ideas para esta investigación, así que sea flexible y trabaje con las ideas de su niño/niña. Aquí hay un diagrama que muestra cómo 6 es posible.

Siempre es una buena idea proponer algunos ejemplos rápidos. Dividir el gran cuadrado en cuadrados de igual tamaño es un comienzo fácil. A partir de eso sabe que todos los números cuadrados (1, 4, 9, 16, 25,…) funcionan.

Trabajando con el ejemplo de 6 cuadrados, podemos usar un cuadrado grande de cualquier tamaño y poner cuadrados de 1 por 1 en dos de sus lados. Haciendo eso para cuadrados cada vez más grandes (1 por 1, 2 por 2, 3 por 3,…) obtenemos 1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6 (como se muestra en la imagen), 1 + 7 = 8, 1 + 9 = 10 , y así. Entonces, todos los números pares a partir de 4 se pueden hacer de esta manera.



Una idea poderosa que resume esto rápidamente es ver que podemos tomar un diagrama que funcione y reemplazar uno de sus cuadrados por otro diagrama que funcione. Entonces, por ejemplo, si toma un simple 2 por 2 completado con 4 cuadrados de 1 por 1, y reemplaza uno de esos cuadrados de 1 por 1 con el ejemplo de 6 cuadrados, obtendrá el diagrama que se muestra a la derecha con 9 cuadrados.

Debido a que un cuadrado está siendo reemplazado por un diagrama de n cuadrados, el cambio neto en el número de cuadrados es sumar n-1 de ellos. Eso significa que podemos tomar un número que funcione y agregar múltiplos de uno menos que el número a cualquier otro número que funcione. En particular, podemos sumar múltiplos de 4 -1 = 3 a cualquier otro número que funcione; los más fáciles de sumar 3 son todos los números pares a partir de 4.

Para resumir, los números 1, 4, 6, 7, 8, 9,… todos funcionan, y es fácil ver al menos una forma sencilla de construirlos. También es fácil convencerse de que 2, 3 y 5 son imposibles.

Si a su niño/niña le gusta explorar esa pregunta, explore variaciones sobre este tema. Suponga que solo permite cuadrados de ciertos tamaños, como 1 por 1, 2 por 2 y 3 por 3. O quizás permita solo de 2 por 2 y 3 por 3. Vea qué preguntas conducen a resultados interesantes y cuáles no lo son tanto.

Otra dirección para explorar es llenar otras figuras con figuras que tengan la misma forma. Por ejemplo, haz la misma pregunta para triángulos regulares (triángulos con todos los lados de la misma longitud). Algunas figuras son interesantes de investigar de esta manera, y otras no lo son en absoluto, ¿cuáles?

Capítulo 5 — Juego de productos

— Introducción —

Utilice una hoja de papel compartida completada de la siguiente manera:

El primer jugador mueve una ficha a cualquier número del 1 al 9 en los cuadros del 1 al 9 en la fila inferior. El segundo jugador coloca otra ficha en uno de los cuadros del 1 al 9 en la fila inferior y reclama el producto en la cuadrícula de 6 por 6. A partir de ese momento, cada jugador elige mover una de las dos fichas y reclamar el producto (si puede). El primer jugador en reclamar 3 cuadros adjuntos gana. Mezcle los números de producto en la cuadrícula de 6 por 6 para que su niño/niña practique mejor la identificación de los productos.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Estos tableros de juego se pueden hacer tan grandes como quiera, aunque llegan a ser bastante grandes con bastante rapidez. Aquí hay algunas tablas más grandes con los rangos de números mayores correspondientes debajo de ellas.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Los cuadrados con estrellas rojas son cuadrados "libres" y se pueden usar por cualquier jugador según sea necesario.

Capítulo 5 — Calculadoras limitadas

— Introducción —

Suponga que tiene una calculadora que está muy averiada y tiene el desafío de producir algún resultado en la calculadora. Puede idear una amplia variedad de escenarios que pueden proporcionar desafíos interesantes con una descripción rápida del acertijo. Esta actividad es fácil de jugar oralmente siempre que tenga un momento libre. Aquí hay algunos ejemplos para comenzar.

Aunque hay algunos momentos en que se utilizan matemáticas más profundas en estas preguntas, en su mayoría estos son problemas para divertirse jugando con ellos.

1a) Suponga que tiene una calculadora con +, -, x y /, pero solo una tecla numérica funciona, la del 4. ¿Podría obtener el resultado de 21? Si es así, ¿cuál es la menor cantidad de pasos que necesitaría?

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21 es una forma, pero hay muchas otras formas de hacerlo. Otra es 4 x (4 + 4/4) + 4/4. El objetivo es jugar y disfrutar de la exploración.

1b) Suponga que pueda usar el 4 como máximo cuatro veces, ¿qué números podría producir? Suponga que tiene que usar el 4 exactamente cuatro veces.

A medida que aumentan los recursos matemáticos de un niño/niña, el problema de los cuatro 4 es divertido. En este punto, las opciones de su niño/niña son bastante limitadas, pero todavía es muy divertido jugar con el juego. Será particularmente difícil formar muchos de los números sin dividir o usar decimales. No se preocupe por poner todos los números en orden, simplemente proponga tantos números diferentes como sea posible.

Aquí hay algunos ejemplos solo para comenzar.

1 = (4/4) x (4/4) = 44/44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4 - 4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44/4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) Juegue con otros números únicos y cree otros resultados.

2a) Suponga que su calculadora solo pudiera sumar 4 o 7. ¿Qué números podría producir?

Este es el resultado que hemos visto varias veces hasta ahora. Comenzando en (4 - 1) x (7 - 1), puede lograr todos los números sumando múltiplos de 4 y 7. 18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7, y así sucesivamente.

2b) Suponga que tiene 4 o 7, pero puede sumar y restar. ¿Qué números podrías producir?

Puede producir todos los números de esta manera.

2c) Reemplace 4 y 7 con otros pares de números. ¿Qué pasa con estos pares?

En la teoría de números, esto se llama teorema de Bezout. El resultado dice que al combinar múltiplos de dos números puedes producir cualquier múltiplo del máximo común divisor de los dos números.

3) Suponga que solo tiene la tecla 1 y solo puede sumar o duplicar. Por ejemplo, 2 x (2 x 1) + 1 es 5. ¿Qué otros números puede crear?

Esta es una pregunta sobre números binarios disfrazados. No es importante que su niño/niña se dé cuenta de esto o lo entienda, es solo para jugar. Cualquier número se puede escribir en binario, por lo que todos los números se pueden lograr combinando el duplicar con sumar 1. Por ejemplo, 21 es 16 + 4 + 1. Entonces, 21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

Capítulo 5 — Doble o nada

— Introducción —

Los jugadores comienzan el juego eligiendo en secreto 5 números distintos mayores que 20 y no mayores que 120. Una vez seleccionados, se escriben donde todos pueden verlos. Usando tarjetas numéricas o alguna otra estrategia, se crea un número aleatorio del 1 al 20. Ese número se duplica repetidamente hasta que se acierta el número de alguien por primera vez o el número se vuelve más grande que 120. El primer jugador en acertar los cinco números es el ganador.

— Análisis —

La pregunta es: ¿Cuáles son los cinco mejores números para elegir? Aquí hay algunas ideas en las que pensar.

<u>Regla</u>: Elija siempre un número que sea una potencia de 2 veces un número del 1 al 20.

Si elige un número como 23 o 46, nunca se podrán acertar y está garantizado que perderá.

<u>Regla</u>: Nunca elija un número que sea el doble de otro número que podría haber elegido pero no lo hizo.

Si elige 44, ¿por qué no elige 22 en su lugar? Si la otra persona elige 22, se perderá una ronda.

<u>Análisis adicional</u>: Es igualmente probable que se escoja cualquier número del 1 al 20. Sin embargo, debido a que 9 conduce a 18, 18 es el doble de probable como punto de partida que, digamos, 11. Si combina las formas de obtener diferentes salidas, los puntos de partida tienen las siguientes probabilidades:

11 - 1/20 (desde 11)

12 - 3/20 (desde 3, 6 y 12)

13 - 1/20 (desde 13)

14 - 2/20 (desde 7 y 14)

15 - 1/20 (desde 15)

16 - 5/20 (desde 1, 2, 4, 8 y 16)

17 - 1/20 (desde 17)

18 - 2 / 20 (desde 9 y 18)

19 - 1/20 (desde 19)

20 - 3/20 (desde 5, 10 y 20)

Claramente, los mejores números para usar son múltiplos de 16, 12 y 20. Una estrategia simple es usar los cinco números: 32, 64, 24, 48 y 40. Estos números no siempre ganarán, pero le servirán muy bien con el tiempo.