



Capítulo 3 Material de bônus

— Introdução —

Você é alguém que gostaria que houvesse mais exemplos, discussões e comentários nas descrições intencionalmente breves das aulas? Se sim, você veio ao lugar certo! Este arquivo contém material bônus para algumas das atividades do capítulo 3.

Para quebra-cabeças, muitos exemplos de quebra-cabeças resolvidos são fornecidos, junto com comentários adicionais sobre como criá-los. O programa Early Family Math é baseado na ideia de que a matemática inicial é algo que uma família deve fazer juntas, e fazer quebra-cabeças para seu filho fazer com você é uma parte importante desse processo. Depois de pegar o jeito de cada quebra-cabeça, você descobrirá que a maioria, senão todos, os quebra-cabeças são bastante fáceis de criar.

Muitos desses quebra-cabeças têm diferentes níveis de dificuldade, e há muitas sugestões e exemplos nas próximas páginas sobre como criar esses níveis. Sempre comece com os quebra-cabeças mais fáceis. É muito melhor que seu filho tenha sucesso, compreensão e diversão com quebra-cabeças um pouco fáceis demais do que ficar frustrado, desanimado e superado por quebra-cabeças difíceis. Depois que seu filho adquirir confiança e entusiasmo para uma atividade matemática, é hora de aos poucos incorporar desafios maiores. Além disso, nem todos os quebra-cabeças são divertidos para todos, então não force os quebra-cabeças e as atividades que parecem não se encaixar.

Isso é o que você encontrará nas seguintes páginas:

- **Capítulo 3 — Somas de Formas**
- **Capítulo 3 — Nim dobrando o limite**
- **Capítulo 3 — Contando Evens e Odds**
- **Capítulo 3 — Grupos de Soma**
- **Capítulo 3 — Resgate de Zoo**
- **Capítulo 3 — Soma Comuns**
- **Capítulo 3 — Variações de Sudoku**
- **Capítulo 3 — Quantas maneiras**
- **Capítulo 3 — Ordenação do baralho de cartas**
- **Capítulo 3 — Pirâmide de diferenças**

— Coisas legais —

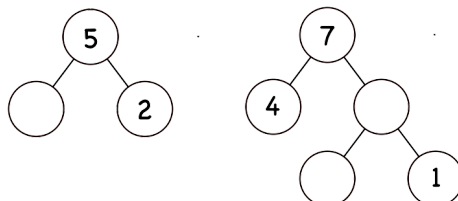
Cada família deve ter a oportunidade de aprender e desfrutar matemática juntos. Para esse fim, Early Family Math é uma coleção de materiais que famílias e educadores podem editar, traduzir, copiar e distribuir livremente, sem pedir permissão, apenas para uso não comercial.

© Copyright Early Family Math - Chris Wright 2021 v. 1.1 Creative Commons: Atribuição-Não Comercial 4.0 Licença Internacional

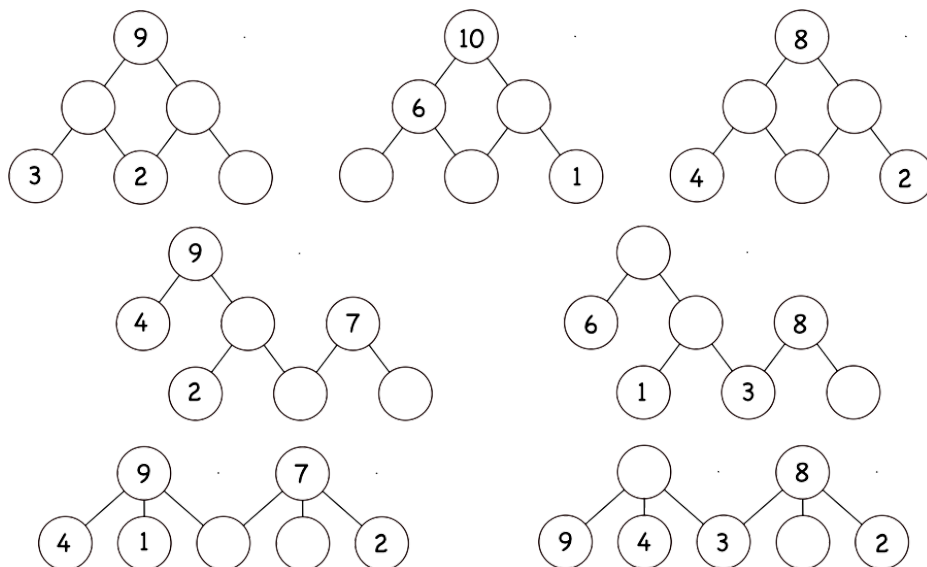
Capítulo 3 — Soma de Formas

Estes quebra-cabeças usam círculos numerados conectados de forma ascendente, e cada círculo é a soma de todos os círculos diretamente abaixo e conectado a ele.

Os quebra-cabeças mais fáceis têm a maioria dos círculos preenchidos. Aqui estão dois exemplos que são fáceis de resolver.



Esses quebra-cabeças podem se tornar mais difíceis se um círculo for usado em mais de uma direção. Todos os próximos sete quebra-cabeças são cálculos diretos, exceto o mais à direita da primeira linha. É mais complicado porque o único círculo no meio é compartilhado por dois círculos desconhecidos acima dele. Esse quebra-cabeça envolve números pequenos o suficiente para ser resolvido facilmente com um pouco de tentativa e erro.

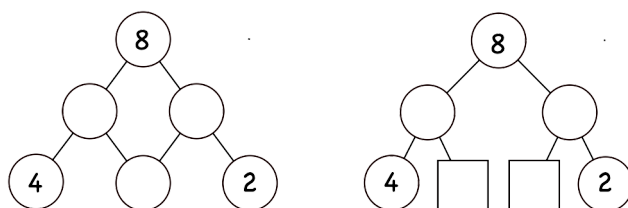


Outra opção para adicionar complexidade a esses quebra-cabeças é usar formas não circulares. Embora o valor em um círculo possa ou não duplicar o valor em algum outro círculo ou forma, o valor em uma forma não circular deve corresponder ao valor em todos os outros lugares com a mesma forma. Por exemplo, todos os quadrados têm o mesmo valor. Use formas correspondentes para praticar a adição de gêmeos, quase gêmeos, e reduzir pela metade.

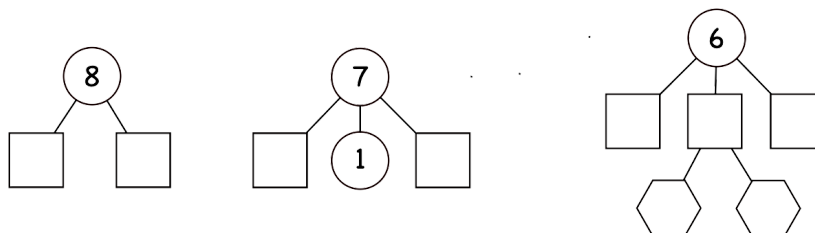
Se desejar, você pode adicionar a regra de que duas formas não circulares com formas diferentes devem ter valores diferentes - por exemplo, um quadrado e um hexágono teriam que ter valores diferentes.

Faça qualquer um desses quebra-cabeças começando com um diagrama totalmente preenchido e, em seguida, removendo alguns números. Se o quebra-cabeça tiver alguns números repetidos, use um quadrado ou outra forma em vez de um círculo para esse número repetido.

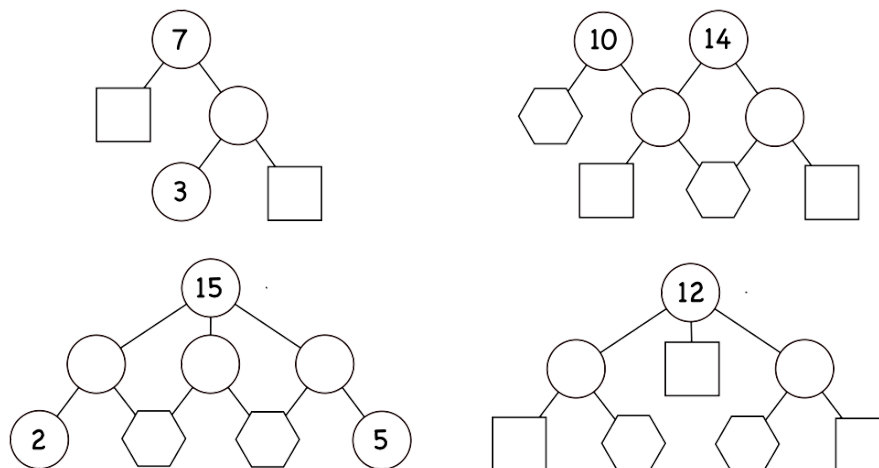
Os próximos dois quebra-cabeças ilustram a diferença psicológica entre usar um círculo de duas direções e substituir o círculo por dois quadrados. Esses dois quebra-cabeças são essencialmente iguais, mas uma criança achará o primeiro muito mais fácil de entender e trabalhar. Dê ao seu filho bastante prática com quebra-cabeças circulares antes de se aventurar em quebra-cabeças mais sofisticados com formas não circulares.



Quebra-cabeças semelhantes aos próximos três são úteis para praticar a adição de gêmeos, quase gêmeos e triplos.



Aqui estão alguns exemplos do uso de formas não circulares para fazer quebra-cabeças mais complicados. Se seu filho gosta disso, existem muitas outras variações para explorar. Feliz quebra-cabeças!



Capítulo 3 — Nim dobrando o limite

— Uma pilha —

Defina um total inicial, digamos 20. Deixe seu filho escolher se vai primeiro ou segundo. Durante o primeiro turno, um jogador escolhe subtrair 1 ou 2 do total atual. Após o primeiro turno, um jogador pode subtrair qualquer número de 1 até o dobro do número usado no último turno. A primeira pessoa a chegar a 0 vence.

Existem muitas versões alternativas deste jogo. Alguns deles são:

- A primeira pessoa a atingir o alvo perde.
- Em vez de usar o intervalo de 1 a 2, o intervalo inicial é de 1 a um a menos (ou dois a menos) que o número de destino.
- Pratique somar, em vez de subtrair, começando em 0 e fazendo com que a primeira pessoa a atingir a meta ganhe (ou perca).
- O limite inicial é um (ou dois) menor que o número alvo e, em vez de dobrar o valor usado na última volta, use o valor da última volta como limite.
- O limite inicial é um (ou dois) menor que o número alvo e, em vez de dobrar o valor usado na última volta, use o triplo do valor da última volta.

Como você pode ver, existem muitas variações. Crie suas próprias regras familiares se estiver gostando do jogo.

Na maior parte, esses jogos são muito mais difíceis de analisar do que as versões do Nim, que usam um conjunto fixo de opções para cada movimento.

— Mais de uma pilha —

Outra maneira de fazer novas versões deste jogo é usar mais de um número. Imagine esta versão como tendo várias pilhas de fichas (seixos, pedaços de comida). Por exemplo, você pode ter duas pilhas com 12 fichas em uma pilha e 8 na outra. Uma regra padrão a ser usada é que você pode pegar qualquer número de fichas, mas todas devem ser de uma pilha.

As versões alternativas deste jogo são:

- Existem mais de duas pilhas.
- Você tem a opção de pegar o mesmo número de fichas de todas as pilhas.
- Você tem a opção de pegar o mesmo número de fichas das pilhas que escolher.
- Você só pode pegar fichas da maior pilha.

Como você pode imaginar, existem ainda mais versões deste jogo; no entanto, talvez isso seja mais do que suficiente por agora!

Capítulo 3 — Contando Evens e Odds

— Configuração Básica —

Use uma pequena coleção de Cartões Numéricos envolvendo algumas pequenas quantidades. Comece com três cartões e, mais tarde, use mais cartões se seu filho gostar da investigação.

Suponha que os números sejam 1, 2 e 3. A questão é: Se você escolher aleatoriamente dois cartões e adicioná-los, é mais provável que obtenha um número par ou um número ímpar?

Existem duas maneiras de analisar isso. Uma maneira é fazer experimentos. Embaralhe as cartas, escolha duas cartas aleatoriamente e veja se a soma é par ou ímpar. Após cada experiência, coloque uma marca na coluna apropriada em um pedaço de papel para contar os resultados pares e ímpares.

A segunda maneira é contar quantas maneiras existem de obter um número ímpar versus um número par. Por exemplo, no caso de usar 1, 2 e 3, há uma maneira de obter um número par ($1 + 3$) e duas maneiras de obter um número ímpar ($1 + 2$, $2 + 3$). Portanto, para os números 1, 2 e 3, as somas dos números ímpares são duas vezes mais prováveis.

Depois de brincar um pouco com 1, 2 e 3, experimente outros grupos de três cartas. 2, 3 e 4 se comportam de maneira diferente? Os grupos 1, 3, 5 e 2, 4, 6 produzem apenas números pares - por que isso? Depois de brincar um pouco com três cartas, veja o que acontece com 4 ou mais cartas.

Para fazer disso um jogo, deixe um jogador ser par e o outro jogador ser ímpar. Veja quem tem mais sucesso após uma dúzia de tentativas.

— Análise de investigação —

O divertido de uma investigação é que ela convida a pessoa a brincar com os números e a ser um matemático. Conforme mencionado acima, brinque com diferentes grupos de três números. Depois de alguma experimentação, seu filho pode notar que qualquer grupo de três números que tenha pelo menos um número par e um número ímpar se comporta da mesma forma. No entanto, se todos os números forem ímpares ou pares, as somas serão pares. O que traz à tona a pergunta usual: por que isso acontece?

Depois de alguma experimentação, até uma criança pequena pode tropeçar na bela regra da teoria dos números que diz:

- Par mais Par é Par
- Par mais Ímpar é Ímpar
- Ímpar mais Ímpar é Par

Por que essa regra funciona? Use a atividade Number Shapes para representar números pares e ímpares com duas linhas de tokens - quando a adição desses números resultará em duas linhas iguais?

Depois que essa regra for descoberta, seu filho pode perceber que os números específicos não importam tanto. Ter os números 1, 2, 3 não é realmente diferente de ter os números 3, 4, 5 (ou 3, 12, 17). A análise realmente depende de quantos números são pares e quantos são ímpares.

Com isso em mente, aqui está uma tabela dos resultados possíveis para grupos de tamanho três e quatro.

3 números:

- 3 pares, 0 probabilidades - 3 somas
- pares 2 pares, 1 ímpar - 1 soma par, 2 somas ímpares par
- 1, 2 probabilidades - 1 soma par, 2 somas ímpares par
- 0, 3 probabilidades - 3 somas pares

4 Números:

- 4 pares, 0 probabilidades - 6 somas
- pares 3 pares, 1 ímpar - 3 somas pares, 3 somas ímpares par
- 2, 2 probabilidades - 2 somas pares, 4 somas ímpares par
- 1, 3 probabilidades - 3 somas pares, 3 somas ímpares par
- 0, 4 Odds - 6 somas pares

Os resultados são surpreendentes e deixam muitas coisas para investigar se houver interesse! O que acontece com 5 números, 6 números ou mais? Por que a troca de números pares e números ímpares não parece alterar os resultados? Por exemplo, se você tiver 3 pares e 1 probabilidade, obterá os mesmos resultados que 1 par e 3 chances. Para circunstâncias como 3 pares e 1 ímpar, por que os resultados saem equilibrados quando as contagens pares e ímpares começam desequilibradas?

Esta é uma matemática legal e até uma criança pequena pode brincar com ela!

Capítulo 3 — Grupos de soma

Esses quebra-cabeças usam uma grade de números com uma soma alvo. Encontre grupos de dois, três ou quatro números que somam o alvo. Os membros de um grupo devem compartilhar lados. Use fichas, como diferentes tipos de itens alimentares, para identificar cada grupo dentro do quebra-cabeça. Quando concluído, todo o quebra-cabeça será composto de grupos identificados.

6	1	2	2
	5	3	4
	1	3	3

8	0	8	3	2
	2	4	4	3
	6	5	5	7
	1	2	3	1

Esses quebra-cabeças fornecem uma prática particularmente boa com ligações numéricas. Ao usar fichas em vez de um lápis, você pode usar as folhas do quebra-cabeça indefinidamente.

Crie esses quebra-cabeças começando com uma grade vazia e colocando números ao redor da grade usando pares e triplos que somam a soma desejada. É mais divertido se o quebra-cabeça tiver apenas uma solução, mas não se preocupe com isso.

6	1	2	2
	5	3	4
	1	3	3

1	6	2
1	0	4
4	1	5

1	2	3
5	3	4
1	3	2

4	2	1
3	5	1
3	1	4

1	0	1
5	5	4
3	3	2

6	5	1	4	2
	3	1	3	3
	2	2	3	1
	5	1	4	2

4	5	1	3
2	1	3	3
5	2	2	4
1	3	1	2

1	5	2	4
3	2	3	2
1	1	2	4
3	3	5	1

1	5	2	1
3	2	1	5
1	2	3	1
2	4	3	3

7	2	4	3
	5	2	1
	6	1	4

2	6	1
1	4	5
4	3	2

7	1	3
0	3	4
1	6	3

5	1	1
4	4	3
3	7	0

4	4	3
1	2	2
6	1	5

7	5	2	1	1
	6	1	2	6
	3	4	3	1
	4	3	5	2

6	1	4	1
4	5	2	3
3	2	3	4
1	6	3	1

4	5	2	1
3	1	3	4
2	3	4	2
3	2	2	1

2	5	3	4
1	5	4	3
6	2	1	6
6	1	2	5

8	5	1	7
	1	2	3
	6	2	5

6	2	4
3	1	4
5	3	4

4	4	1
4	2	7
2	3	5

7	1	0
1	2	8
5	3	5

1	0	4
4	8	4
3	6	2

8	0	8	3	2
	2	4	4	3
	6	5	5	7
	1	2	3	1

2	3	5	3
6	4	3	2
2	4	3	5
4	2	1	7

2	3	2	1
3	2	5	2
1	6	1	3
7	4	4	2

7	1	2	3
2	1	6	5
3	5	1	3
5	4	4	4

9	1	0	9
	4	6	5
	4	3	4

5	6	3
4	5	7
3	1	2

1	2	7
3	5	4
0	9	5

4	1	8
2	3	3
5	4	6

7	4	5
2	6	2
1	8	1

9	5	4	3	6
	7	4	2	3
	2	5	3	6
	8	1	1	3

5	5	4	5
2	4	2	7
2	6	3	6
1	8	1	2

5	2	2	1
3	5	2	6
3	1	3	4
3	7	2	5

2	3	6	3
7	5	3	3
2	2	7	2
5	4	1	8

10	8	2	3
	5	3	4
	5	7	3

6	5	5
1	3	6
2	8	4

7	5	4
3	1	9
4	6	1

4	2	1
4	5	3
4	1	6

1	9	7
4	3	3
3	4	6

10	1	5	3	2
	4	3	7	4
	5	3	5	6
	3	4	1	4

8	9	1	3
1	1	3	4
6	3	5	5
4	7	1	9

4	1	5	5
5	3	2	1
6	5	7	2
4	1	6	3

1	6	8	2
3	1	3	6
3	1	6	5
7	9	4	5

Capítulo 3 — Zoo Rescue

— Descrição do jogo —

Neste jogo, use dois dados ou dois conjuntos de cartas numéricas de 1 a 6. Cada jogador tem 6 fichas - fichas de animais são perfeitas para este jogo, se você as tiver. Cada jogador também tem um pedaço de papel com caixas numeradas de 0 a 5. Cada jogador decide onde colocar suas 6 fichas - não há problema em colocar mais de uma ficha em uma caixa.

Durante a vez de um jogador, dois números são criados lançando os dados ou escolhendo duas cartas, e a diferença entre esses números é usada. Um jogador pode liberar um de seus tokens se tiver um nessa caixa. O primeiro jogador a resgatar todos os seus tokens vence.

— Estratégia para colocar tokens —

Como um jogador deve colocar os 6 tokens? Como costuma ser uma boa ideia, vamos começar com uma pergunta mais simples: Onde seria o melhor lugar para colocar 1 token. Isso estaria claramente na caixa com maior probabilidade de ocorrer. Em vez de fazer qualquer análise complicada, podemos simplesmente listar as possibilidades e ver quais diferenças acontecem com mais frequência.

1-1	0		2-1	1		3-1	2		4-1	3		5-1	4		6-1	5
1-2	1		2-2	0		3-2	1		4-2	2		5-2	3		6-2	4
1-3	2		2-3	1		3-3	0		4-3	1		5-3	2		6-3	3
1-4	3		2-4	2		3-4	1		4-4	0		5-4	1		6-4	2
1-5	4		2-5	3		3-5	2		4-5	1		5-5	0		6-5	1
1-6	5		2-6	4		3-6	3		4-6	2		5-6	1		6-6	0

Contando os resultados, nós tem 0 - 6, 1 - 10, 2 - 8, 3 - 6, 4 - 4, 5 - 2. Portanto, 1 é claramente a melhor escolha e isso acontecerá em 10/36 das vezes. Podemos classificá-los em ordem de frequência como 1, 2, 3, 0, 4 e 5.

A questão muito mais difícil é o que fazer com mais de um token. Depois de ver esses números, uma boa pergunta para uma criança mais velha é: por que você simplesmente não colocaria todos os seus tokens em 1? Para ver a resposta a isso, imagine a situação mais simples em que você tinha apenas dois tokens e ignorou todos os resultados que não eram 1 ou 2. Então, 1 aconteceria 10/18 das vezes e 2 aconteceria 8/18 das vezes. Se você colocar os dois tokens em 1, precisará obter 1 e 1 para ganhar após duas jogadas. No entanto, se você colocar uma ficha em 1 e uma ficha em 2, terá sucesso após dois testes com 1 e 2, ou 2 e 1 - algo que tem 60% mais probabilidade de acontecer!

Em vez de entrar em uma análise longa e detalhada, vamos deixar em algo bastante simples que apela à nossa intuição - coloque a maioria de seus tokens em 1, o segundo mais em 2 e talvez um em 0 ou 3. Não há garantia de que você vai ganhar, mas você deve se sair muito bem no longo prazo!

Capítulo 3 — Soma comum

— Introdução à investigação —

Faça uma folha de papel com 12 linhas. Em cada linha, coloque 8 quadrados. A coluna mais à esquerda de quadrados tem os números de 1 a 12 inscritos nos quadrados. Coloque 1 ficha em cada um dos 12 números. Comece a lançar um par de dados. Após cada lançamento, mova a ficha da soma dos dados um quadrado à direita. O objetivo de cada token é ser o primeiro a chegar à direita na página.

Deixe seu filho fazer algumas perguntas para investigar. Algumas perguntas naturais são:

- qual token vencerá e por quê?
- Quais tokens funcionam bem e quais não funcionam?
- Qual token é o pior?
- Como os vencedores mudaram se as linhas foram alteradas para ter menos ou mais quadrados?

Peça a seu filho que explique suas idéias sobre as respostas a essas perguntas e, em seguida, investigue suas idéias fazendo experiências.

Adicione um elemento competitivo a isso, adivinhando qual token vencerá antes do início da rodada.

— Análise —

Como na análise do jogo anterior, a maneira mais simples de analisar isso é listar todas as possibilidades.

1 + 1	2		2 + 1	3		3 + 1	4		4 + 1	5		5 + 1	6		6 + 1	7
1 + 2	3		2 + 2	4		3 + 2	5		4 + 2	6		5 + 2	7		6 + 2	8
1 + 3	4		2 + 3	5		3 + 3	6		4 + 3	7		5 + 3	8		6 + 3	9
1 + 4	5		2 + 4	6		3 + 4	7		4 + 4	8		5 + 4	9		6 + 4	10
1 + 5	6		2 + 5	7		3 + 5	8		4 + 5	9		5 + 5	10		6 + 5	11
1 + 6	7		2 + 6	8		3 + 6	9		4 + 6	10		5 + 6	11		6 + 6	12

Resumindo a frequência temos: 1 - 0, 2 - 1, 3 - 2, 4 - 3, 5 - 4, 6 - 5, 7 - 6, 8 - 5, 9 - 4, 10 - 3, 11 - 2, 12 - 1. Pelo forma, esses são bons números para lembrar em qualquer jogo de dados que envolva somar os dois dados!

Portanto, 1 sempre perderá e 7 é o mais provável de vencer. No entanto, a diferença de frequência entre 7 e 6 ou 8 não é muito grande. Se você apenas fizer alguns lançamentos, será muito difícil prever com certeza qual deles ganhará. Somente quando você fizer muitos lançamentos, poderá garantir que 7 acabará ganhando.

Capítulo 3 — Variações do Sudoku

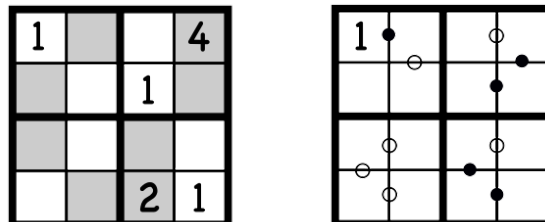
Existem muitas variações do Sudoku no mundo e ainda mais outros quebra-cabeças semelhantes a essas variações do Sudoku. Esta seção examinará cinco dessas variações do Sudoku. Todos eles seguem a regra do “Quadrado Latino” - que cada número ocorre exatamente uma vez em cada linha e coluna.

Você pode fazer qualquer um desses Sudokus começando com um quebra-cabeça preenchido do tipo apropriado - um Quadrado Latino ou um Sudoku Jigsaw. Todas as soluções de Sudoku fornecidas no Material Bônus para os Capítulos 1-2 devem ser úteis para você para isso. Depois de ter uma solução em mãos, adicione as informações adicionais necessárias para este tipo especial de quebra-cabeça e remova alguns ou todos os números.

— Jigsaw Sudokus com informações extras —

Esses dois tipos de quebra-cabeças são quadrados latinos que têm a restrição adicional de que cada sub-região tem todos os números ocorrendo nela exatamente uma vez. Além de ser um Jigsaw Sudoku, eles têm propriedades adicionais.

Sudokus ímpares pares. Nesses quebra-cabeças, os números pares estão acinzentados. Essas informações adicionais tendem a tornar esses quebra-cabeças muito fáceis e geralmente é possível remover quase todos os números.



Kropki Sudokus. É o mesmo que o Sudoku normal, exceto que dois tipos de pontos colocados entre as células são adicionados. Se o ponto for vazio, os dois números estão separados um. Se o ponto for preenchido, um número é metade do outro número. Semelhante aos quebra-cabeças pares-ímpares, essas informações adicionais tendem a torná-los muito fáceis e isso significa que quase todos os números podem ser removidos.

— Sudokus com adição e subtração —

TPuzzles estas são divididos em sub-regiões que têm um número de destino que lhes foi atribuído. Ao contrário do Sudoku padrão, é permitido que um número seja repetido em uma sub-região, desde que o quebra-cabeça ainda seja um quadrado latino. Se uma sub-região tiver apenas um quadrado, o número de destino será o valor desse quadrado.

Em um quebra-cabeça Sumdoku Sudoku, a soma de todos os números em uma sub-região é o número de destino fornecido. Em um quebra-cabeça Diffdoku Sudoku, todas as sub-regiões têm um ou dois quadrados. Se uma sub-região tem dois quadrados, a diferença entre os dois números é o número-alvo fornecido.

3+		3	7+
6+	4+		
		6+	4+
7+			

3-	1-	3	2-
		3-	
1-	1		2-
	2-		

Em um quebra-cabeça Sumdiffdoku Sudoku, tanto a adição quanto a subtração são usadas. As sub-regiões são marcadas com um “+” ou um “-” para indicar se deve receber uma soma ou diferença.

Os três tipos de quebra-cabeças geralmente são feitos sem nenhum número. É claro que as sub-regiões com um quadrado são essencialmente quadrados com o número preenchido. Para uma criança pequena, você pode fornecer alguns dos números para montar o quebra-cabeça dentro de seu nível de sofisticação.

Para variar os cálculos matemáticos, use diferentes grupos de números em vez do usual 1 a 4 para 4 por 4. Por exemplo, use os números 1, 3, 5 e 7. Se você fizer isso, liste os números acima do quebra-cabeça para que seu filho saiba o que usar.

Capítulo 3 — Quantas maneiras de

contar o número de maneiras de fazer escolhas pode levar a alguns resultados interessantes. A maioria dessas situações de contagem se beneficia de ser analisada sistematicamente. Isso é difícil para uma criança, e tudo bem - deixe-as brincar com isso e aproveitar a exploração. Ser sistemático pode esperar até que eles fiquem mais velhos.

— Investigação 1 —

Desenhando apenas com vermelho e azul, de quantas maneiras você pode desenhar um monstro com um chapéu, olhos e capa? Como isso muda se você apenas coloriu o chapéu e a capa? Como isso mudaria se você usasse três cores ou se pudesse usar cada cor apenas uma vez?

Fazer essa investigação de forma sofisticada envolve multiplicação, e é muito cedo para isso. No entanto, seu filho pode brincar com essas idéias e começar a desenvolver um senso de como fazer esse tipo de contagem.

Vamos abordar essas questões uma de cada vez. O chapéu pode ser vermelho ou azul, os olhos podem ser vermelhos ou azuis e a capa pode ser vermelha ou azul. Cada objeto a colorir dobra o número de possibilidades. Assim, 2 dobrado e depois dobrado novamente dá 8 possibilidades. Listá-los é uma boa maneira de ver isso. Seja V para vermelho e A para azul, e liste as cores na ordem para o chapéu, os olhos e a capa. As possibilidades são: VVV, VVA, VAV, VAA, AVV, AVA, AAV, AAA.

Colorir apenas o chapéu e a capa dá 2 duplicados, o que é 4 possibilidades. A lista para isso é: VV, VA, AV, AA.

Se você tivesse três cores para as três coisas a serem coloridas, você teria $3 \times 3 \times 3 = 27$ possibilidades (uma longa lista).

Em geral, se você tiver eventos que não se influenciam, multiplique as possibilidades. Se você só tem permissão para usar cada cor uma vez, os eventos se restringem e influenciam um ao outro. Vamos listá-los usando G (para verde) para a terceira cor: VAG, VGA, AGV, AVG, GVA, GAV.

— Investigação 2 —

Você tem uma linha de 5 doces idênticos. De quantas maneiras você pode colori-los para dar 2 vermelhos e 3 azuis?

Marque 2 folhas de papel com V e 3 folhas de papel com A. Seu filho pode brincar com as dez maneiras que existem para distribuí-los. A lista é: VVAAA, VAVAA, VAAVA, VAAAV, AVVAA, AVAVA, AVAAV, AAVVA, AAVAV, AAAVV. Uma maneira de ver isso é que, uma vez que você decida os 2 pontos para o vermelho, o azul não tem escolha e deve ir para os outros 3 pontos. Curiosamente, você também pode olhar para isso de outra maneira, colocando as 3 peças azuis primeiro.

Se você estiver se divertindo, varie esta investigação mudando os três números - apenas certifique-se de que os dois números menores somam o número total de doces.

— Investigação 3 —

Encontre todas as maneiras de obter uma soma somando os números 1 e 2. Faça isso com e sem considerar a ordem.

Não considere a ordem. Veja o exemplo de somar até 4. As possibilidades são $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$ e $2 + 2$. Existem 3 maneiras de fazer isso. Depois de tentar mais alguns exemplos, você percebe que está contando o número de maneiras de usar 2 para somar números menores ou iguais a 4. Você pode ter de 0 a 2 dos 2, portanto, existem 3 maneiras de fazer isso. Em geral, a resposta será um a mais da metade do número para números pares e um a mais da metade de um a menos do que o número ímpar.

Considere a ordem. Para o exemplo de 4, as possibilidades são $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$, $1 + 2 + 1$, $1 + 1 + 2$ e $2 + 2$. Portanto, existem 5 maneiras de fazer isso. Brinque com muitos exemplos e faça uma tabela com os resultados. Aqui está o que você deve pegar (ok, você provavelmente não subiu para 10):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Depois de olhar para esses números, seu filho pode notar que cada par de números soma o próximo número. Por que isso acontece? Esses números são chamados de Números de Fibonacci e aparecem com uma frequência surpreendente.

Para ver por que esses números ocorrem nesta investigação, observe o exemplo de 4 e observe o último número usado na soma. O último número é 1 ou 2. Se for 1, os números anteriores fornecem todas as maneiras de somar até 3. Se o último número for 2, então os números anteriores fornecem todas as maneiras de somar até 2. Assim, o número de maneiras de somar 4 é o total das maneiras de somar até 3 mais as maneiras de somar até 2.

Números maiores. Se você está gostando disso, pode brincar com as várias maneiras de obter somas que envolvem os números de 1 a 3 ou mesmo de 1 a 4. Procurar padrões nesses casos é muito mais difícil, mas brincar com os números será apenas tão divertido.

Capítulo 3 — Ordem dos baralhos de cartas

— Introdução —

O desafio é empilhar um baralho de cartas numeradas, digamos 1 a 5, para que o seguinte seja verdadeiro:

A carta do topo é 1. Separe esta carta do topo. Mova a próxima carta para o fundo do baralho. A próxima carta é 2 e é posta de lado. Mova a próxima carta para o fundo do baralho. Continue até que todas as cartas sejam colocadas de lado em ordem.

Assim que seu filho achar fácil para 1 a 5, desafie-o a fazer isso para faixas de números maiores.

— Seja Sistemático —

A dificuldade desse quebra-cabeça é ser sistemático. Para baralhos de cartas de qualquer tamanho, você pode brincar com ele e, eventualmente, encontrar a resposta. Vamos procurar padrões interessantes que tornem isso mais fácil.

Suponha que você coloque as cartas em ordem na mesa. Aqui estão as soluções para os primeiros casos. Os números listados após a seta indicam a ordem das cartas restantes após a primeira passagem pelas cartas.

1

1 2 -> 2

1 3 2 -> 3

1 3 2 4 -> 3 4

1 5 2 4 3 -> 5 4

1 4 2 6 3 5 -> 4 6 5

1 6 2 5 3 7 4 -> 6 5 7

Se houver um número par de cartas (digamos 6), então as posições ímpares são preenchidas com a primeira metade das cartas em ordem (3 neste caso), e as outras posições são preenchidas usando a solução para a metade os cartões apenas aumentaram de valor. No exemplo para 6, os pontos ímpares são preenchidos com 1, 2, 3 e os pontos pares são preenchidos com 4, 6, 5 - os valores 1, 3, 2 (a solução para um baralho de três cartas) aumentados por 3.

O padrão para um número ímpar de cartas é um pouco mais complicado. Como antes, os pontos ímpares são preenchidos com a primeira metade dos números (1 a 4 no caso de 7). Se você olhar os exemplos, a primeira carta após a seta será movida para o final, então deve ser a carta que você deseja por último nessa sequência. Após essa observação, a resposta procede como no caso par.

Capítulo 3 — Pirâmide de Diferença

— Introdução —

O desafio é colocar os números de 1 a 6 em uma pirâmide com uma carta na linha superior, duas cartas na segunda linha e três cartas na terceira linha, onde cada número é a diferença dos dois números abaixo dela.

Se você estiver tendo problemas, aqui estão duas dicas que ajudam. O 6 deve estar na linha inferior porque não pode ser a diferença de nenhum par de números. Da mesma forma, o 5 deve estar na linha inferior ou na linha do meio acima do 6 e do 1.

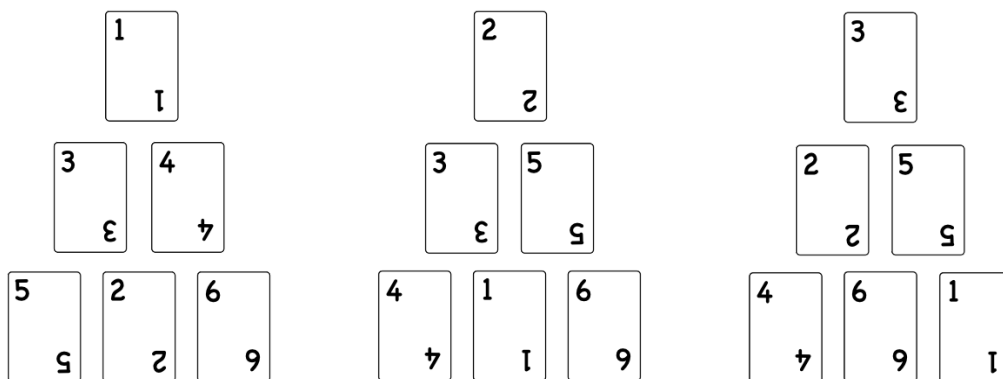
— O que são soluções “diferentes”? —

Se seu filho acha esse quebra-cabeça fácil de fazer, desafie-o a descobrir todas as maneiras de fazê-lo. Discuta o que significa duas soluções serem diferentes - se uma solução for a imagem espelhada de outra, ela deve ser considerada diferente?

Responder à pergunta sobre o que torna as soluções diferentes é útil no início. Como a imagem espelhada de qualquer solução é fácil de fazer e também é uma solução, faz sentido ignorá-la. Ignorar as imagens espelhadas reduzirá pela metade o número de soluções a serem consideradas.

Por exemplo, podemos supor que o 6 não está apenas na linha inferior, mas também no meio ou no lado direito da linha inferior. Continuando pensando com o 5, a linha inferior só pode ter quatro layouts possíveis: 5 a 6, b 5 6, c 1 6 ou d 6 1.

Neste ponto, é uma questão de trabalhar os vários valores possíveis de a, b, c e d. Depois de algumas tentativas e erros, você descobrirá que a é 2, b nunca funcionará, c deve ser 4 e d deve ser 4. Assim, ignorando as imagens espelhadas, existem exatamente três soluções:



— Pirâmides maiores —

Vamos usar as cartas de 1 a 10 para fazer uma pirâmide com quatro linhas. Isso é muito mais complicado. Alguns cartões podem ser colocados, mas depois disso requer alguma determinação. Como 10 não pode ser a diferença de duas cartas, ele deve ficar na linha inferior. Da mesma forma, o 9 está na linha inferior ou na linha seguinte, acima do 1 e do 10. As cartas 8 e 7 também são boas cartas para se livrar de possibilidades.

Isso significa que a linha inferior se parece com uma das seguintes (ignorando as imagens espelhadas):

ab 9 10, c 9 d 10, 9 ef 10, gh 10 9, i 9 10 j, 9 k 10 L, mn 1 10, o 1 10 p, qr 10 1

São muitas possibilidades a considerar!

Felizmente, se você considerar onde 8 e 7 podem ir, as possibilidades são reduzidas à lista a seguir (assumindo que não haja erros!). É fácil terminar cada um deles depois de ter a linha de baixo.

8 3 10 9, 6 1 10 8, 8 1 10 6

Pirâmides de tamanho 15, 21 ou superior são deixadas para os verdadeiramente dedicados. Boa sorte e divirta-se!