

# 第 1-2 章课后练习

## — 简介 —

在课程的设计中，我们特意对其内容进行了简化。然而，如果您希望通过更多的例子和更深的讨论来加强对课程的理解，那么您就来对地方了！本课后练习包含课程第 1 章和第 2 章中某些相关内容。

对于各类数学题，我们不仅提供了解题方法的示例，也提供了有关如何设计题目的建议。早期家庭数学计划认为早期数学教学应该是家庭成员一起做的事情，也就是说让孩子与家长一起参与解题是这一学习过程的重要组成部分。一旦您掌握了各个题目的窍门您就会发现大多数题目都很容易设计。

本课后练习中的题目难度级别各不相同，接下来您会看到关于如何设计不同难度级别题目的建议和示例。我们强烈建议您从最简单的题目开始着手，这样就可以让您的孩子通过简单的题目来获得成就感和乐趣。尽量避免一开始就做太难的题目，因为那样会打击孩子学习的积极性。当您的孩子对数学产生了兴趣和建立了信心后，您再开始慢慢提高难度。值得注意的是，小孩不一定会对每个题目都感兴趣，所以您也不必要求小孩完成所有题目。

本课后练习包含以下内容：

- 第 1 章—找不同游戏
- 第 2 章—跳岛-计数
- 第 2 章—剪纸
- 第 2 章—关于数字 1 和 2 的尼姆游戏
- 第 2 章—点点相连
- 第 2 章—拼图数独
- 第 2 章—带有拼图的数字数独
- 第 2 章—大于号数独
- 第 2 章—拆谎游戏
- 第 2 章—15 格拼图

---

## - 法律知识 -

每个家庭都应该有机会一起学习和享受数学。为此，“早期家庭数学”是一系列教材，家庭和教育工作者可以在未经征得许可的情况下自由地编辑，翻译，复制和分发，仅用于非商业用途。

©版权所有早期家庭数学— Chris Wright 2021-2022 v. 1.2 知识共享(Creative Commons) 署名 4.0 公共许可协议国际版

# 第 1 章—找不同游戏

本游戏的规则是让您的孩子从四个物品中找出与其他三个最不相同的一个。以下是一些示例和对应的说明。孩子们通常会以崭新的方式看待事物，这值得家长们用心去聆听并判断小孩的推理是否既新颖又合理。

将这四个物品告诉孩子的方法有很多种，其中最简单的方法就是逐个读出来。如果这些物品容易画，那么您可以把它们画出来。如果这些物品难画，那么您可以在广告或杂志中找出相应的图片并剪裁出来。除此之外，您也可以从一张包含大量内容的照片中指出照片中的其中四个物品。

当您的孩子练习了一段时间后对游戏有了扎实的认识，您就可以与您的孩子进行角色交换。换句话说就是，由您的孩子出题来让您解决。这样他们能从中学到更多东西。一如既往的，他们的推理可能与您的推理大不相同，因此请您仔细观察。

## — 一组四个 —

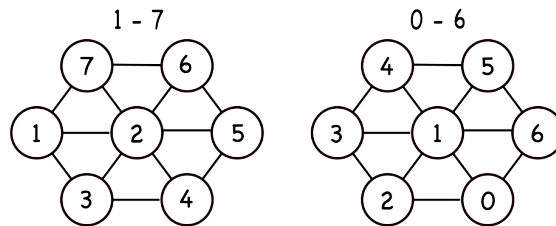
以下是一些帮助您入门的示例：

- 兔子、狗、蝴蝶、枕头—前三个是动物，而枕头不是。
- 香蕉、奶酪、锤子、胡萝卜—锤子是唯一不能吃的东西。
- 奶酪、鞋子、外套、衬衫—除了奶酪，其他的都是衣物。
- 红色三角形、带孔的红色正方形、绿色的正方形、无孔的红色正方形—前三个中的任何一个都可以是与众不同的那个：红色三角形是唯一不是正方形的形状。带有孔的红色正方形是唯一不牢固的正方形。绿色方块是唯一一个非红色的。
- 狗、猫、狮子、金鱼—狮子是清单上唯一一个不能当宠物的动物，而且它也比其他动物大很多。或者，其中三个各有四条腿并且生活在陆地上，然而鱼没有腿并且生活在水中。
- 玫瑰丛、橡树、枫树、松树—除了玫瑰丛，其他的都是树。
- 长凳、桌子、沙发、凳子—桌子是唯一一个不是用来坐的家具。或者，沙发比其他的柔软。
- 树皮、喇叭声、彩虹、单击—彩虹是唯一没有声音的。
- 袜子、裤子、牙刷、帽子—牙刷是唯一一个不是用来穿的东西。
- 椅子、雨伞、沙发、凳子—雨伞是唯一一个不是用来坐的物品。
- 蚂蚁、猪、蜘蛛、草蜢—猪是唯一一只不属于昆虫的动物。

您也可以使用图片代替文字来进行这个游戏。您平时可以养成从广告、杂志或者其他地方剪裁图片的习惯，以便您使用这些图片来玩这项游戏。

## 第2章-跳岛-计数

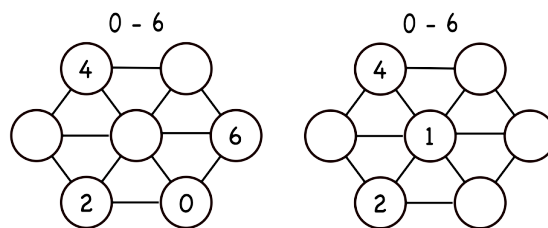
这些题目中标有编号的岛屿（圆）由桥梁（线）连接。玩家需要解决的问题是要找到一条路径按照顺序连接起各个岛屿。



在最简单的版本中，从1到7所有的数字都已经填好。您可以通过从1以外的其他数字开始并省略一些数字来对这个游戏稍作改变。

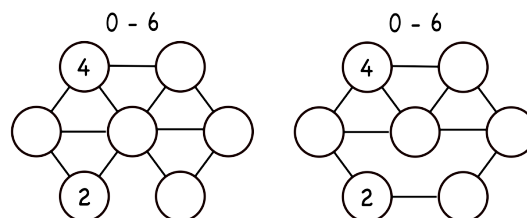
一旦您的孩子对计数建立起了信心，那些填满了数字的版本都会显得很简单。从这些简单的题目开始练习是个好策略，因为有助于建立解决游戏的信心。相对而言，更具挑战性的是那些省略了部分数字的题目。

一开始只需省略几个数字，然后慢慢省略更多数字，这样就可以让您的孩子循序渐进地解决这些游戏。



这两个游戏中的相邻的数字被省略掉了，这个填写起来相对容易。1必然与0和2相邻，然而这样的位置只有一个。3旁边是2和4，并且1填上后只有一个位置满足填3的要求。5肯定是在4和6之间。

第二个题目相对来说要难一些。3必须与2和4相邻，因此只有一个位置可选。5必须紧挨着4，所以现在只有一个地方。6必须靠着5。最后，剩下的位置一定是0。



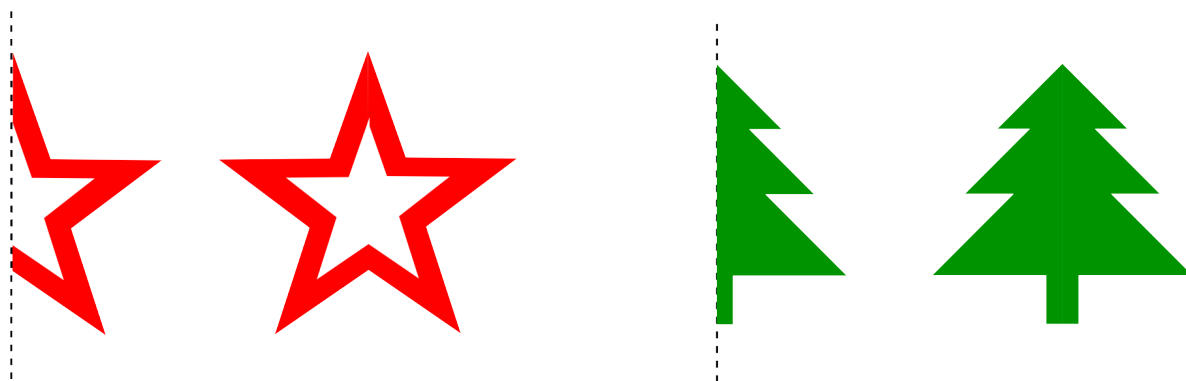
为了使这道题变得更加困难，我们可以删除1以及一些桥。您可以尝试各种变化，也可以让您的孩子参与设计之中。

## 第 2 章-剪纸

通过对一张纸折叠并剪裁来进行设计，这就叫做剪纸艺术。

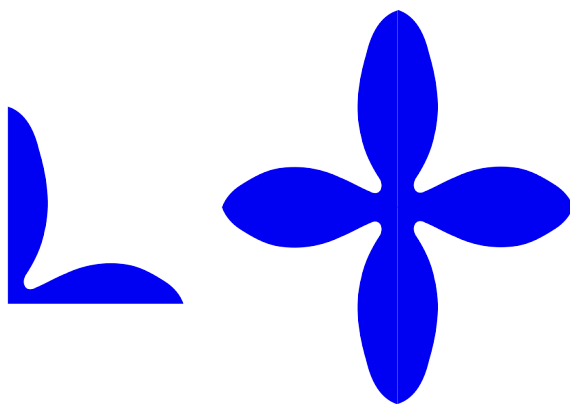
### — 对折 —

将纸张对折一次，然后将其裁切，即可创建出新的图案，并且其中一侧与另一侧镜像对称。尝试切出脸孔、灯或几何形状。以下两个例子是一颗星星和一棵树，其中左边是对折时，右边是展开后的图案。



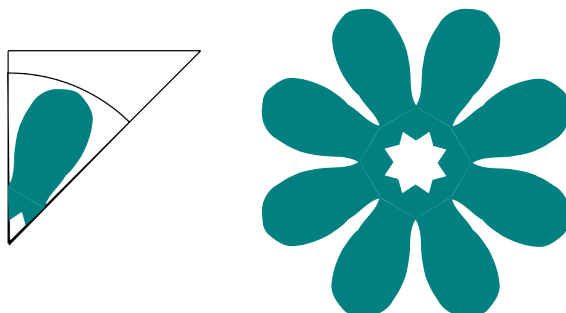
### — 两次对折 —

对折纸张一次，然后在垂直方向再对折一次，展开后的将会是两组镜像对称的图形。通过这个方法您可以制作出花朵等形状。以下的图形中，左图是折叠了两次之后剪裁出的形状，右图是展开后纸张的形状。



### — 三折 —

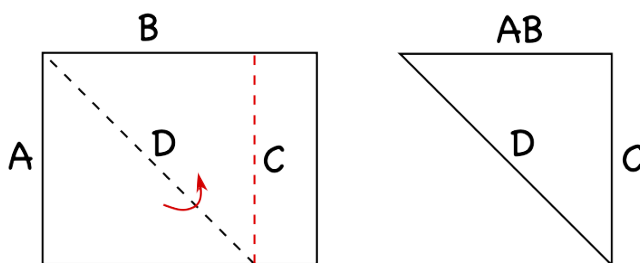
您可以尝试各种折叠和裁剪方式。下图是通过先将纸张折叠两次，然后再将其对角线折叠到先前折叠的一角而得到的。



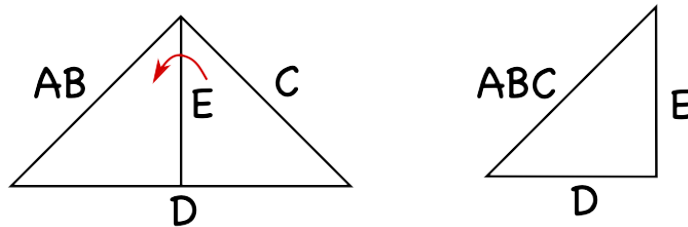
### — 雪花 —

这是六边雪花的制作流程。虽然乍一看步骤不少，但请不要被吓到。其实您只需稍加练习，就熟能生巧。

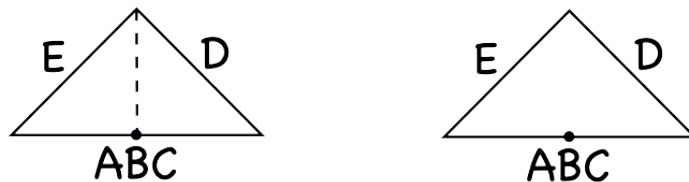
首先，取一张标准纸并在一个角上折叠，使标记为 A 和 B 的两面相交。将折痕留在原处，并沿标记 C 的线切割。



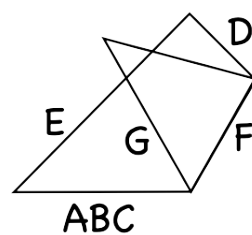
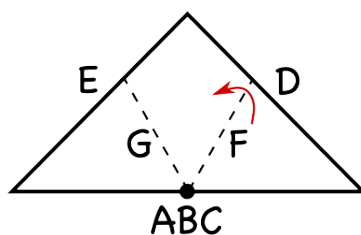
取产生的三角形并将其对折，以使 AB 和 C 边重叠。



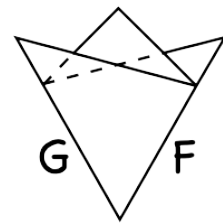
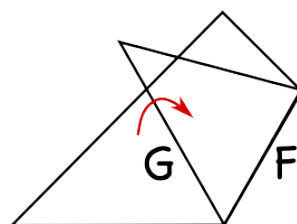
在此三角形中放置一个临时折痕，并使用该折痕标记侧面 ABC 的中间，然后恢复临时折叠。



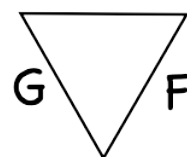
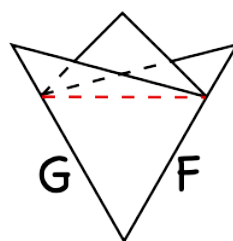
在折叠 F 线条时，您要同时调整 G 线条的位置，以便让 G 线条可以将 ABC 和 F 所构成的角度平分。



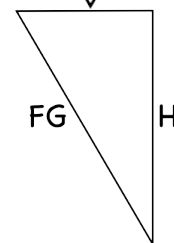
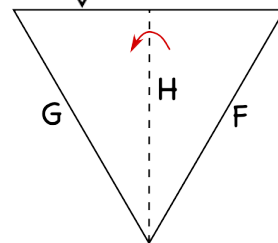
沿 G 线条折叠时要往下方进行折叠，以使新折叠的纸在其他纸的下面。



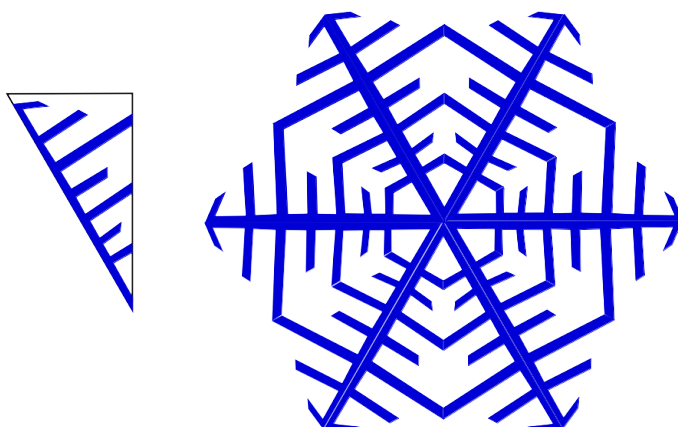
尽管并非绝对必要，但最好沿着红色虚线剪掉顶部，因为顶部区域的纸参差不齐、分布不均。



最后，将这个三角形对折。您现在终于可以开始正式您的设计了！



尽情享受尝试各种不同的裁切和颜色组合所带来的乐趣！



## 第 2 章—关于数字 1 和 2 的尼姆游戏

### — 游戏规则 —

选择一个目标数字（例如 10）。让您的孩子选择是他先开始还是您先开始。从 0 开始，在每回合中，一个人选择在当前数字上加 1 或 2，第一个达到目标数字的人获胜。

此游戏也可以用减法来进行：从目标数字开始（例如 10），在每回合中，玩家选择减去 1 还是 2。第一个达到 0 的人获胜。

该游戏的另一个玩法是：被迫达到目标数字或超过目标数字的玩家并非获胜，而是输了。您还可以尝试看看如果允许玩家每回合增加（或减去）1、2 或 3 会发生什么情况。

### — 了解游戏 —

这款游戏无需进行任何分析，它本身就很有趣，而且您的孩子可以通过该游戏来练习 1 和 2 的加减法。除此之外，当您的孩子准备好时您可以通过这个例子展示两个解决问题的好技巧：1) 从更简单的示例中学习，2) 寻找规律。

该游戏的任何版本都可以通过这种方式进行学习。让我们看一个例子：从 10 开始做减法，得到 0 的人获得胜利。这个游戏的难点是 10 离 0 太远了。所以，让我们看一个更简单的版本。当要求孩子这样做时，他们通常建议从 5 或 6 开始（从 1 开始似乎是荒谬的，但这实际上是他们应该做的！）通常最好是尽可能从简单的开始（这意味着从 1 开始）。如果这是您先走并且计数为 1，那么通过减 1 您就可以获胜。再试试别的数字。如果计数为 2，您可以通过减 2 获胜。如果计数为 3，那么您必输无疑，无论是减去 1 还是 2，您都将对手置于必胜之地。如果计数为 4，您将获胜。因为您将减去 1，并将对手置于必败之地。以此类推，我们可以建立如下表格：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
赢	赢	输	赢	赢	输	赢	赢	输	赢

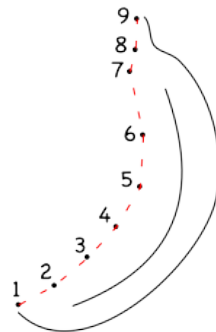
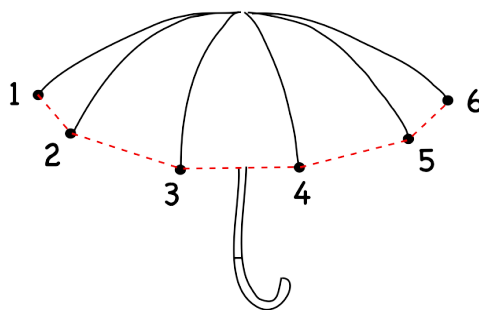
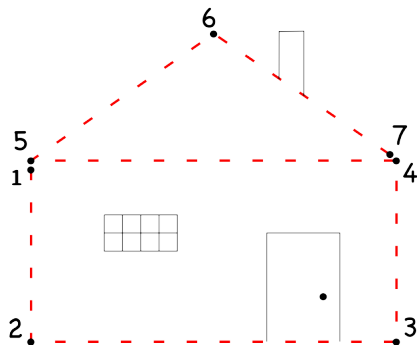
从该表可以看出规律：每三个连续的数字对应的结果都是相同的。所以每当从 10 开始，您就应该先减去 1。让人感到欣慰的是，无论问题多复杂，一旦您从问题的简单版本着手，您就可以轻松快捷地寻找规律而无需进行复杂的分析。现在您已成为尼姆游戏大师了，从任何数量开始该您都知道该怎么做！这个基本游戏的任何版本都同样容易分析。

那么现在问题来了：为什么重复的输赢规律是数以 3 计？一旦一个玩家被困在了“输”的数字（即是 3 的倍数）上，那么此后的每一回合两个玩家所减数字之和都可以是 3。因为如果占下风的玩家减去 1，则占上风的玩家可以减去 2；如果占下风的玩家减去 2，那么占上风的玩家可以减去 1。这样一来占下风的玩家会一直被困在“输”的数字上。

## 第2章-点点相连

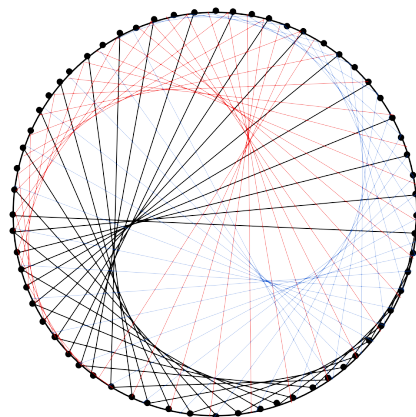
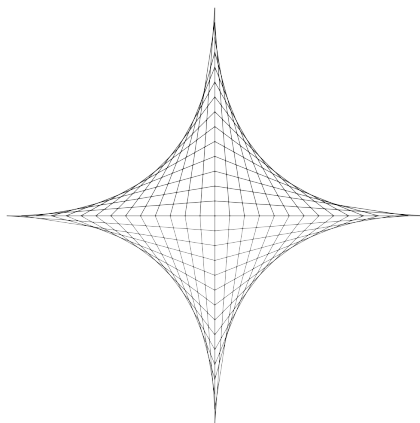
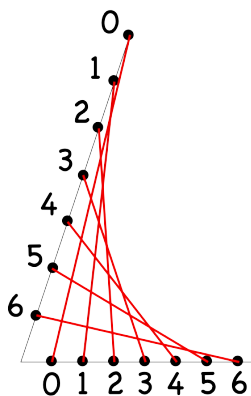
### — 用点描绘日常用品 —

通过连接带有编号的点来进行有趣的绘图。一种方法是先画一个简单的图，例如一个房子，然后擦除掉其中一些直线，并用带编号的点来代替它们。如果将这些点按顺序连接起来就可以重现原图。



### — 制作带有角度的几何图案 —

在一个角的两侧分布着对应两组相同编号的点，通过连接两两相同编号的点就可以制作抽象的集合图形。您也许在作画的过程中根本不需要用到这些编号，如果是这样的话您可以将数字省略掉-这样就可以让设计看起来更加整洁。您可以通过让孩子用彩色绘画来让图案看起来更加丰富多彩。从网络上您可以在纱线画的类别中找到很多相关的例子。最右边这个圆形图案是通过在线段的一端连接一个点并在另一端连接两个点来实现的。

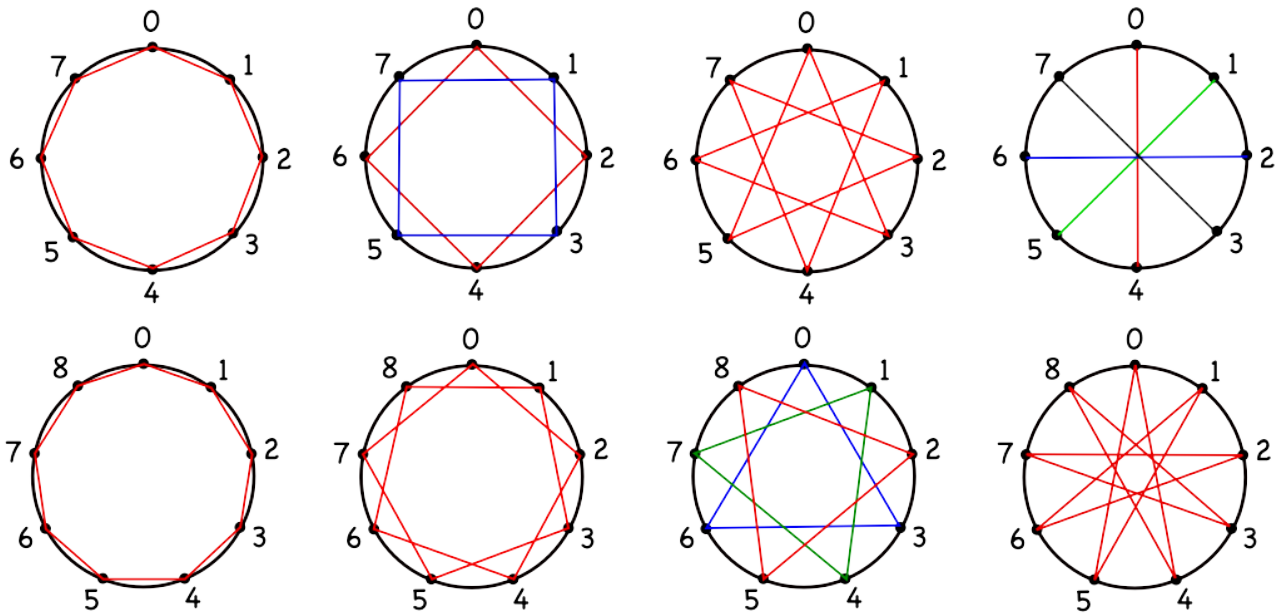




## — 用圆圈制作图案 —

这是上面提到的最后一个方案的特例。将一定数量的点（比如说8或者9个）均匀地分布在一个圆上，然后让您的孩子按数字的顺序连接各个点，或者每隔一个或者两个点来连接。如果想让这个游戏进行地更加容易，您可以在一块纸板或木头上钉上图钉来代表各个点，然后用细线在图钉之间编织图案。

如果您的孩子对他制作的图案感兴趣，不妨进一步去思考一下这些问题：对于一个有8个点的圆，为什么通过每跳1、3、5或7步的连接方法只需要用到一条线就可以把所有点连接满，然而如果是，每跳2、4或者6步则需要用到2条甚至6条线。类似地，对于一个有9个点的圆，为什么每跳1、2、4、5、7或8步连接只需要用到1条线，而对于3或者6步连接则需要用到3条。虽然对于小孩子来说它们还太小，大概难以理解2、4、6与8有共同的因数，而3、6和9有共同的因数——但是，这个游戏能给他们日后的思维方式埋下启蒙的种子。



## 第 2 章—拼图数独

### — 简介 —

这是您孩子的第一个数学游戏，这很酷！这也意味着您应该非常缓慢地进行练习，以使您的孩子获得很多成功和乐趣，并且很少感到沮丧。

这些 4x4 拼图数独的规则非常简单。每个拼图中有四种不同类型的符号。每种符号都应该出现在拼图的每行、每列以及每个 2 x 2 角中。建议使用可移动的卡片来制作拼图，因为这样能让您的孩子轻松地尝试寻找解决方案。

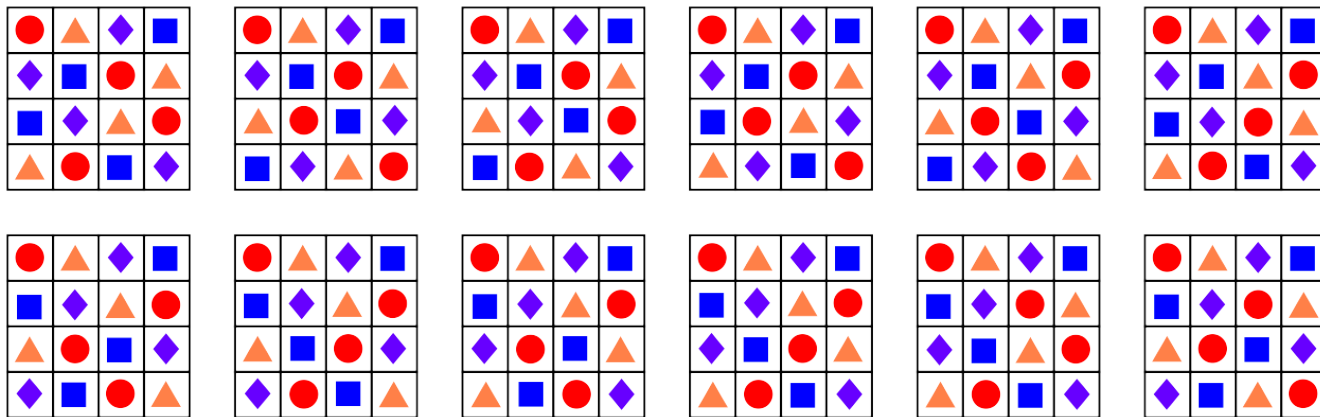
您制作的第一个拼图应该在每一行中都缺少一种符号。一旦您的孩子理解并弄清楚了这些游戏，您就可以尝试更具挑战性的游戏，但请循序渐进。

创建这些游戏最简单的方法是从完整的数独开始，然后删除一些符号。为了帮助您做到这一点，下面提供了许多完整的数独。接下来，我们提供了一系列方法指导您如何从完整的数独中创建您自己的新数独。

### — 完整的数独 —

在给您完整的数独例子之前，值得注意的一点是：您可以通过交换任意一种图案类型来创建额外 23 个不同数独。例如，您可以通过替换圆形和三角形或者替换菱形和正方形来创建一个新的数独。

下面的示例彼此之间各不相同，并且不能通过图案替换来得到另外一个。因此您可以通过上述的交换方法从示例中创建更多数独。



## — 利用完整的数独创建新数独的方法 —

在完成数独游戏后，您可以使用以下任何方法来创建具有独特解决方案的新数独。一般来说，删除的图案越多，难度就越大。

- 从每一行或每一列中删除一个图案。
- 从每个  $2 \times 2$  角删除一个图案。
- 从整个拼图中删除所有一种图案。
- 从 1 个  $2 \times 2$  角移除所有图案。
- 删除一整行和一整列。
- 删除所有一种图案，以及其他每种图案。
- 从两个  $2 \times 2$  相对的角上移走所有图案。
- 从两个  $2 \times 2$  个相对的角中删除所有图案，并从其他两个角中的每个令牌中删除 1 个图案。

当然，以上并不是全部方法，我们只是将一些常规的方法列出来以供您参考，以帮助您快速创建数独。您完全可以自己尝试运用一些其他的方法来创建新的数独。

## 第2章—带有拼图的数字数独

数字数独类似于图形数独，唯一不同的是数字代替了图形。如果您的孩子尚未准备好识别数字，您则可以改用不同数量的点来代替数字。为避免涂改，建议您使用带有编号（或虚线）的纸条来辅助解题。

对于4 x 4拼图，每个行和列的编号从1到4一次。同样，每个标记的子区域都有1到4的数字。

首先从一个完整的拼图开始，使用可移动的带编号的纸，然后移走一些纸，为您的孩子创建这些拼图。

### — 4 x 4 拼图 —

由2 x 2子区域组成的4 x 4拼图与之前给出的图形数独完全相同。您可以翻回之前的页面去查看这些题目的解决方案。要将图形数独转换数字数独版本，只需要用不同数字来替换不同彩色形状。例如，红色1代表圆圈、2代表橙色三角形、3代表紫色菱形、4代表蓝色正方形。

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

1	2	3	4
4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	1	2
3	4	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

### — 5 x 5 拼图 —

由于这种类型的题目太多了，我们无法穷举出所有可能性的组合。举出这些例子的目的是想让您了解其中的规律。您的孩子可能会喜欢尝试用不同的方法来将 5 x 5 的正方形切成 5 片各含有 5 个小正方形的子区域。

由 5 个小方块组成的区域称为“五格拼版”，使用它们来制作拼图会很有趣。也许您可以从一张厚的彩色纸上切出一些五格拼版，然后看看可以做些什么设计！

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
2	3	1	5	4
5	1	4	2	3
4	5	2	3	1

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4

### — 6 x 6 拼图 —

好了，您现在已经对这个游戏有初步的了解了。实际上还有很多类似的拼图！这里我们展示了几个 6 x 6 的拼图，可以为您提供一些想法。像之前一样，与您的孩子参与其中，并且尝试一起设计一些自己的游戏。

1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1
5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2
6	1	2	3	4	5

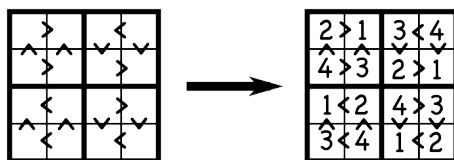
1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3
6	3	2	5	4	1
3	4	1	2	6	5
2	6	5	3	1	4
5	1	4	6	3	2

1	2	3	4	5	6
2	5	1	6	3	4
5	6	4	2	1	3
3	4	2	5	6	1
4	3	6	1	2	5
6	1	5	3	4	2

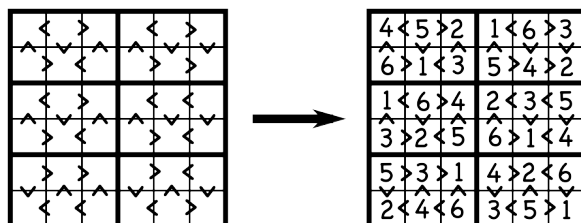
## 第 2 章-大于号数独

大于号数独谜题的基本规则与常规数独大致相同——每个数字在每一行、每一列以及每个子区域中只能出现一次。此外，如果单元格中的数字必须符合数值之间的小于或大于号所规定的条件。

您可以基于之前所完成的常规数独来制作这些大于号数独——本教材中前面提供的所有示例数独都会对创建这些新的谜题很有帮助。在相同几何形状的空白网格上插入大于和小于符号。如果省略所有数字并输入所有不等式（小于或大于），通常很容易解决游戏。对于您的孩子来说，一个有用的策略是首先寻找最小和最大数字应该放在什么地方。



当您的孩子第一次学习如何解决这些游戏时，请先填入所有不等号和部分数字。逐渐地，开始省略更多的数字和一些不等号。



## 第 2 章—拆谎游戏

某人先进行一段陈述，而其他玩家则负责证明此人在撒谎，比如通过找到举反例来拆穿谎言。

### — 几乎总是正确的简单陈述 —

一种说法是说某些事情总是正确的。以下是此类型说法的一些例子，后面包含了简要说明为什么它们是谎言。

- 所有卡车都有四个轮子。——大型卡车通常有 6 个、10 个，甚至更多的车轮。
- 所有矩形都是正方形。——矩形的边长不必相同。
- 所有的鸟都能飞。——鸵鸟、鸬鹚和鸬鸵是不会飞的鸟。
- 月亮仅在晚上可见。——在白天经常可见月亮。
- 所有形状均具有直边。——圆没有直边。
- 所有游乐场都有秋千。——有些游乐场没有秋千。
- 所有房间都有椅子。——卧室和浴室通常没有椅子。

### — 几乎总是正确的“如果……那么……”陈述 —

另一种声明形式为「如果\_\_，则\_\_」。以下是一些示例，其中简要讨论了它们为什么是谎言。

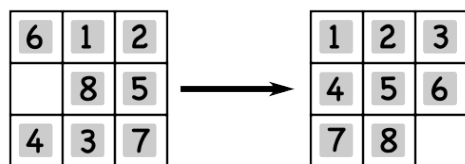
- 如果今天是星期一，那今天就要上学。——有些星期一是假期，有些星期一在暑假。
- 如果我三个小时不吃饭，那我就饿了。——大多数人可以睡三个小时以上，并且不会饿着肚子。
- 如果一个人比某人高，那么高的人比矮的人老。——孩子长大后通常会比父母高。
- 如果阳光明媚，那就是温暖的一天。——冬季可能天晴又寒冷。
- 如果某人迟到了，那一定是发生了一些坏事。——有时人们会由于粗心或无法控制的原因（交通，恶劣的天气，汽车故障）而迟到。

## 第 2 章-15 格拼图

### — 拼图说明 —

这个游戏的经典版本以由 5 条水平和垂直线形成的  $4 \times 4$  的正方形空网格开始。使用一组 15 张纸，其大小为网格正方形，并从 1 到 15 对纸进行编号。这个游戏的开始是有人将纸放在网格上。游戏的目的是在仅使网格的右下角为空的情况下使纸张有序。为此，如果一张纸与空的正方形相邻，则可以将其移动-在这种情况下，可以将其滑入该空间。取决于人如何设置拼图，拼图可能可以解决，也可能无法解决。

$4 \times 4$  的网格对于初学者来说太难了，因此从较小的网格开始。网格可以小到  $2 \times 2$ ，也可以大到孩子想要的大小。编号的纸张数总是比网格的尺寸少一。例如，在  $2 \times 3$  的网格上，使用从 1 到 5 的卡片。



要设计这些拼图，您有两个选择。第一种是将正方形随机放置，在这种情况下，这个拼图有 50% 的几率是可解决的。另一种方法是，您可以先将纸张放置在最终完成的位置，然后随机按照游戏规则移动纸张。这样就可以保证拼图是可解决的。

### — 进行游戏 —

让孩子玩这个游戏的一个主要原因是让他们乐在其中，直到他们不小心解决了问题，并且还可以从中练习按顺序排列数字。尽管目标很简单，但您可能会开始好奇这个的更深层的用意。

解决问题的常见方法是从简单的问题或示例中学习。所以，让我们开始吧。

最小的示例是  $2 \times 2$ 。对于这种大小，很明显，行最终要么是 1 2; 3 0，或者是 1 3; 2 0

第二小的是  $2 \times 3$ 。对于这个尺寸，可以先把 1 和 4 移到最左侧一列中。完成此操作后，您的拼图将看起来像 1 \_ \_; 4 \_ \_。完成最后的四个正方形，就像处理  $2 \times 2$  的情况一样。

$2 \times 4$  拼图的处理方法与此类似。首先把 1 和 5 移到最左侧一列中。接下来，将 2 和 6 放在左侧第二列，而先不要管 1 和 4。最后解决  $2 \times 2$ 。

目前为止我们已经清楚了如何解决 2 行拼图，那么超过 2 行的应该怎么办？比如说对于 3 行的拼图，您可以通过从正确排列第一行着手。之后，维持第一行现状，接下来的就和解决两行拼图一样了。

同样，如果有 4 行，则先进行第一行，然后进行第二行（不影响第一行），然后再像以前一样完成最后两行。



## — 这个拼图可以解决吗？ —

很好，您现在已经掌握了一种简单的方法来解决拼图。那么下一个问题来了：我怎样才能看一下拼图就知道它是否可以解决呢？

为了使答案的描述尽可能简单，如有必要，请快速执行一些操作，以将空白正方形放在底行中。接下来，在长列表中列出行的列表——第一行列在第一位，第二行列在第二行，依此类推，最后一行列在最后。当您列出最后一行时，请忽略空的正方形。

拿这个长长的清单，计算其中的反转次数。当列表中较早的数字大于列表中较晚的数字时，这称为取反。如果求反数是偶数，那么这个游戏就可以解决。如果是奇数，则不是。

以本讨论开始时的  $3 \times 3$  拼图为例。首先将 4 移至第二行。然后，列表为：6 1 2 4 8 5 3 7。此列表中有 10 对数字是顺序颠倒的：6 1, 6 2, 6 4, 6 5, 6 3, 4 3, 8 5, 8 3, 8 7, 和 5 3。因为颠倒数字的对数是偶数，所以这个游戏是可以解决的。

为什么该规则有效？我不会在这里进行详细的推论。关键思想是每次移动时都要留意颠倒数字的对数。事实证明，如果您把空格放到最后一行中，那么在进行任何一步移动之后，颠倒数字的对数始终以偶数变化。因此，如果颠倒数字的对数是奇数，那么这个拼图永远不可能按顺序排列。