⚠ 本章由谷歌翻译 - 请帮助我们改进！

Early Family Math

第 5 章奖励材料

— 介绍 —

您是否希望在课程的有意简短描述中包含更多示例、讨论和评论？如果是这样，那么您来对地方了！该文件包含第 5 章中某些活动的奖励材料。

对于谜题，提供了许多已解决谜题的示例，以及有关如何创建它们的附加评论。早期家庭数学计划基于这样一种理念，即早期数学是一个家庭应该一起做的事情，为您的孩子制作拼图是该过程的重要组成部分。一旦你掌握了每个谜题的窍门，你就会发现大部分谜题对你来说都很容易创建。

许多这些谜题都有不同的难度级别，在接下来的页面中有许多关于如何创建这些级别的建议和示例。总是从最简单的谜题开始。让您的孩子在有点太简单的谜题中体验成功、理解和乐趣要好得多，而不是因为太难的谜题而感到沮丧、气馁和过度挑战。一旦您的孩子建立了对数学活动的信心和热情，那就是慢慢融入更大挑战的时候了。此外，并不是所有的谜题对每个人来说都很有趣，所以不要推送看似没有联系的谜题和活动。

这是您将在以下页面中找到的内容：

- 第 **5** 章 **– Nim** 与因素
- 第 **5** 章 **– Eratosthenes** 的筛分
- 第 **5** 章 **–** 杠杆和移动设备
- 第 **5** 章 **–** 划分盒子
- 第 **5** 章 **–** 字母替换拼图
- 第 **5** 章 **–** 调查 **–** 玩形状
- 第 **5** 章 **–** 产品游戏
- 第 **5** 章 **–** 有限的计算器
- 第 **5** 章 **–** 加倍或无

第 5 章 – Nim 与因素

— 介绍 —

从任何数字开始，比如 20。让孩子决定是先走还是第二走。在他们的回合中，玩家可以从数字中减去当前数字的任何除数。玩家被迫0输。

— 分析 —

像往常一样，了解这款游戏的一个好策略是查看游戏的更简单版本，在这种情况下，这意味着从非常小的数字开始。如果轮到您并且您面临这些数字中的每一个，那么将会发生以下情况：1 - 输，2 - 赢，3 - 输，4 - 赢，5 - 输，6 - 赢，7 输和 8赢。到现在为止，模式已经很清楚了——如果这是你的举动并且你有一个奇数，那么你就会输；如果您有偶数，那么您将获胜。

找到制胜策略是一大步，但让我们更深入。为什么这样做？造成这种情况的奇数和偶数的属性是什么？把这个问题摆在你的孩子面前，给他们很多时间去思考和试验——不要着急，这个与问题搏斗的过程是非常宝贵的，不应该被短路。

一些小数字的实验很快就会揭示出正在发生的事情。如果你有一个奇数，所有的除数都是奇数，所以当你减去任何一个除数时，结果是偶数。因此，一圈的奇数总是导致下一圈的偶数。偶数总是有奇数和偶数作为除数。所以，情况不太一样。然而，如果你有一个偶数，你的目标是给你的对手一个奇数，有一个简单的方法 - 选择除数 1 并减去它！

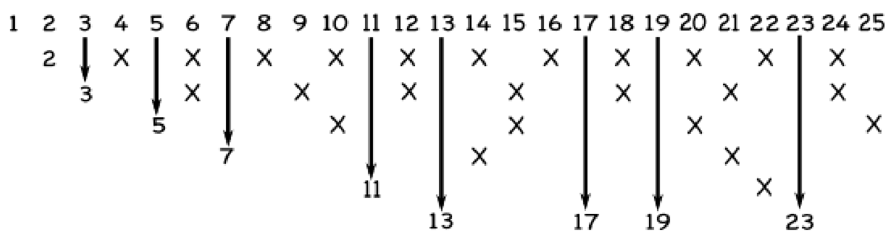
第 5 章 - 埃拉托色尼的筛分法

- 介绍 -

从 1 到 25 的数字线开始 - 如果空间和耐心允许，可以使用更大的范围。

在其下方写下数字 2。即使有这 2 行，也将 X 放在 2 的每个倍数的下方。

现在，拉下第一个没有 X 的数字（在本例中为 3）并将其放在下一行。写下 3 并将 X 放在该行的所有倍数上。继续这样。最后，您将拉下所有质 数。请记住，1 是一个单位 而不是素数！



— 分析 —

这个简单的过程揭示了一些关于素数的有趣事实。看看您的孩子是否能提出其中一些问题——但是，如果它们不是自然产生的，这里有一些问题要问。

1）为什么数字会下降素数？

假设你有一个合数。我们想表明这个数字下面会有一个 X。作为复合，它可以被 1 和该数字之间的某个数字 n 整除。如果 n 是素数，那么我们的合数下面会有一个 X，因为 n 是更早的素数。如果 n 不是素数，那么它下面有一个来自某个较早素数的 X，称为 p。现在，p 整除 n，n 整除我们的新数，所以 p 必须整除我们的新数。因此，在标记 p 的倍数时，我们会在新数字下放置一个 X。

2) 当您为素数的倍数放置 X 时，有些数字已经有来自较早素数的 X。什么时候发生，什么时候不发生？

让我们看看上面筛子中 5 的倍数。 5 x 2、5 x 3 和 5 x 4 的倍数已经被划掉了。只有 5 x 5 是新的。发生这种情况是因为 5 x 2、5 x 3 和 5 x 4 都是 2 和 3 的倍数，更早的素数。如果我们想把 X 放在新的地方，我们必须将 5 乘以只有 5 及以上的素因数的数字。因为跟踪所有这些有点乏味，所以有些人所做的只是划掉奇数倍数并留在那里。

3) 对于这个筛子，最后一个在其行中有一个有用的新 X 的素数是什么？

在这个筛子中，有用 X 的素数是 2、3 和 5。7 和 11 的倍数都是旧 X。如果您查看最后一个问题的答案，您将在此处看到答案。获得新 X 的唯一方法是将一个素数乘以大于或等于其自身的素数。一旦我们达到像 7 这样的质数，其中 7 x 7 > 25，我们就不需要检查它。所以，我们只需要检查平方小于或等于最后一个数字的素数。

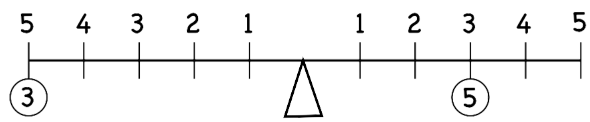
4) 如果给你一个数，比如 53，你需要用哪些素数除以它才能看出它是素数？

从上一个问题的答案来看，我们只需要检查平方小于或等于53的素数。那些素数是2、3、5和7——这些素数都不能整除53，所以53一定是素数！

第 5 章——杠杆和移动体

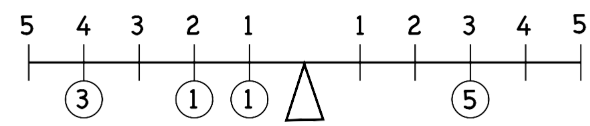
——杠杆——

杠杆原理指出，质量施加在杠杆一侧的力等于质量乘以它与支点支点的距离。



在上面的杠杆中，左边的3离支点的距离是5，所以它的力是3 x 5 = 15。右边的5离支点的距离是3，所以它的力是5 x 3 = 15。这个杠杆处于平衡状态。

如果一侧有多个重物，则这些力会相加。



在这个杠杆中，左侧有 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15，右侧有 5 x 3 = 15。所以它是平衡的。

我们将这些问题限制为仅使用整数。您可以决定是否允许将多个权重挂在同一点上——我们将假设在接下来的讨论中可以进行多个权重。

— 杠杆拼图 —

你有一个 3 个单位的重量和一个 5 个单位的重量放在支点的两侧。他们应该在哪里平衡？答案可以是距离 5 和 3，但也可以是 10 和 6，或者甚至更大的答案，例如 15 和 9。开放讨论您孩子提出的任何问题。

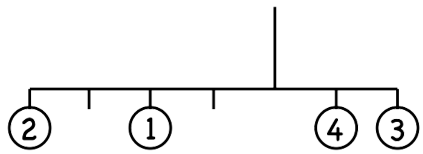
如果你有一个 3 个单位和一个 5 个单位的砝码放在杠杆的一侧，你可以在另一侧的距离上放置哪些砝码？这个问题延续了第 4 章末尾“让它算数”页面上的问题。和以前一样，探索不同的权重组合。如果 3 和 5 被 4 和 5、4 和 9 或 6 和 9 代替会发生什么？

如果我们将 3 个单位和 5 个单位的重量放在支点的两侧，最后一个问题会如何变化？现在很容易用 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1 称一个 1 个单位的重量。你还能用这种方法称其他哪些重量？

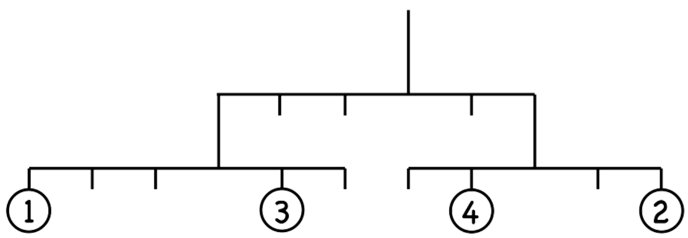
— 移动设备 —

为您提供了一些权重和带有一些连接点的移动设备的设计。挑战在于每个连接点最多放置一个重量，以便移动设备沿每条手臂保持平衡。为了解决这些问题，我们将假设制造手机的电线是无重量的。手机中的每个手臂都是一个需要平衡的杠杆，所以这些谜题是杠杆平衡的延伸 - 在开始之前练习这些谜题。

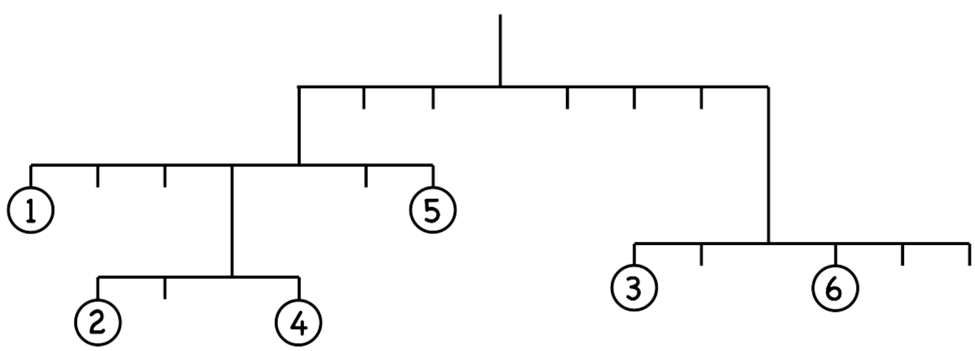
从最简单的手机开始，它们只是空中的杠杆。这是将重量从 1 到 4 放在此移动设备上以平衡它的解决方案。这作为一个杠杆，支点在悬挂点。对于这个移动设备，我们有 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2。



如果移动设备有多个级别，那么每个级别上的每个单独的手臂都必须作为杠杆进行平衡。对于下一个移动，底部的两个臂平衡，因为 1 x 3 = 3 x 1 和 4 x 1 = 2 x 2。对于下一个级别，您只需将其下方的权重相加。例如，左侧的重量是 1 + 3 = 4 – 就下一级而言，重量位于下臂的哪个位置无关紧要。因此，对于下一个级别，(1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12，因此顶层也会平衡。



为彼此制作移动拼图玩得开心。这是使用从 1 到 6 的每个数字的最后一个。不要担心花哨和使用每个数字一次。任何完成的拼图都会很有趣。检查我们的级别：2 x 2 = 4 x 1； 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2； 3 x 2 = 6 x 1 ; 和 (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4。



第 5 章 – 划分盒子

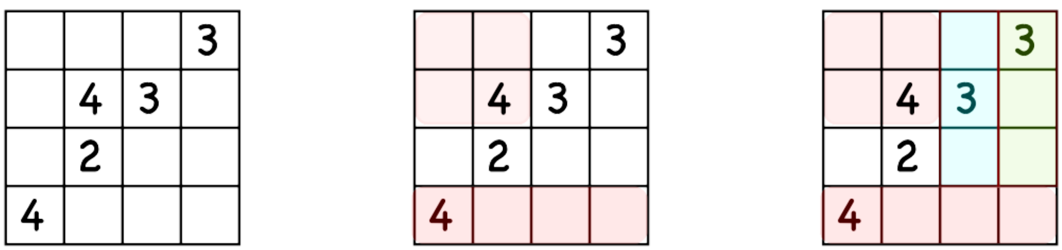
– 介绍 –

一个 4 x 4 或更大的矩形，在它的一些正方形中带有数字，是分成更小的矩形。每个数字必须以一个单独的矩形结束，其面积为该数字。

对于成年人来说，构建这些谜题很简单。取一个矩形，将其内部划分为多个矩形，在每个内部矩形内输入区域的数字，然后去除内部矩形的任何符号。唯一棘手的部分是将数字放在使谜题相当容易解决的位置 - 如果您的谜题最终太难，您可以随时根据需要给出提示。

— 解决策略 —

以下是一些可以简化解决这些难题的通用策略。尽最大努力让您的孩子在玩拼图时发现这些规则。列出他们提出的规则。



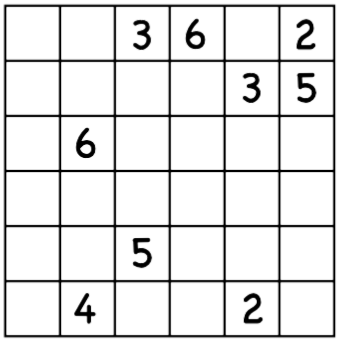
1) 看数字只有一两个选项的矩形。

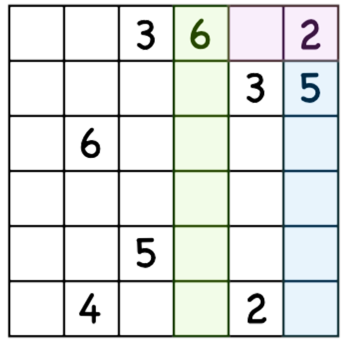
两个 4 都受到高度限制。每个 4 只能在 1 x 4 或 2 x 2 矩形内。上面的 4 被卷边，所以它不能在 1 x 4 的内部。因此，左上角必须有一个 2 x 2 的矩形。这使得下方的 4 只可能其矩形为 1 x 4 并沿着底边延伸。

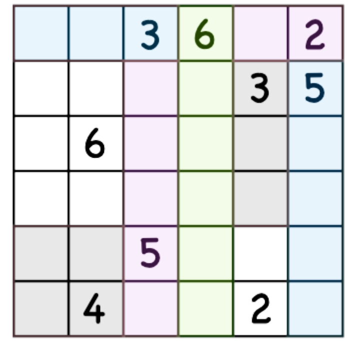
2) 看素数——它们必须在一个 1 x n 的矩形内。

上面拼图中的 3 必须包含在一个 1 x 3 的矩形中。右上角的 3 只能是沿顶部边缘或沿右侧的 1 x 3 矩形的一部分。左上角的 2 x 2 正方形被 4 挡住，使得沿着顶部边缘不可能有 1 x 3。

沿底部的 1 x 4 迫使两个 3 中较低的 1 x 3 成为两个垂直可能性中较高的一个。







3) 接近最大维数的数字通常很少有选择。

看看下一个谜题中的 6 和 5。最上面的 6 个需要很大的空间，唯一有足够空间的方法是垂直垂直向下，用完整个列。其他 6 不能是 1 x 6，因为该行被其他 6 的列截断了。所以，下面的 6 一定是 2 x 3，这还不是很确定。

再举一个例子，如果这个拼图中有一个 8，那么 1 x 8 就不适合，所以它必须是 2 x 4 矩形的一部分。

4) 被装箱的方格几乎没有选择。

最上面的 5 被装箱，所以唯一的选择是在 5 箱列中。其他 5，因为它也是素数，必须垂直或水平。它被 6 的列水平切断，因此它必须垂直向上到 3 的正下方。

5) 角落通常受到高度限制。

右上角的 2 必须是水平的，所以很容易填写。

第 5 章 - 字母替换拼图

— 介绍 —

一旦您的孩子对本章前面几页中的缺失数字拼图感到满意，他们就可以开始玩这些谜题。在这些中，一位或多位数字被字母替换。字母的三个规则是：

- 给定的字母总是相同的数字 数字
- 的最左边的数字永远不会是 0
- 不同的字母必须是不同的数字数字来

通过解决加法或减法问题并替换一个或多个创建这些谜题。还可以创建拼图来为您的孩子制作有趣的解决问题的挑战。请注意，字母的值不会从拼图转移到拼图。

— 示例 —

第一个示例说明了如何解决标准的加法或减法问题并从中制作字母替换难题。第一个版本用 A 替换了所有 6, 第二个版本继续用 B 替换了 2。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

这些示例的其余部分都经过精心构建，以允许使用特定情况的属性进行求解。需要注意的一个特性是，当您将两个数字相加时，下一列的进位始终为 0 或 1。因此，例如，在问题 A + A = C4 中，C 必须为 1，因为不允许为0.

$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array} \quad \begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}$$

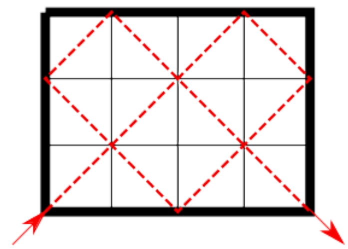
$$\begin{array}{r} A \\ A \\ +A \\ \hline B2 \end{array} \quad \begin{array}{r} C \\ C \\ +C \\ \hline D4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +7 \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ A \\ +B \\ \hline B0 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array} \quad \begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array} \quad \begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}$$

第 5 章 - 玩形状

— 弹跳台球 — 介绍 —

想象一张台球桌，每个角落都有一个口袋。当球从桌子的一侧弹开时，它会以与进入时相同的角度弹开。如果我们从左下角以 45 度角射球，它最终会在哪里？答案取决于桌子的大小。右图是 3 x 4 桌子上发生的事情。



给您的孩子一张桌子，并挑战您的孩子预测哪个角落会先被击中，以及在到达那个角落之前需要弹跳多少次。

— 弹跳台球 — 分析 —

首先让您的孩子玩这个，不要急于发现结果。正如您将看到的，这个问题涉及到一个年轻人的一些复杂的想法。根据需要，提出一两个问题，让他们的思考更有条理。你知道接下来会发生什么——先看看更简单的表格来寻找模式——当这个想法对你的孩子来说是自动的，这将对他们的余生有益！

最简单的表是 1 x n，它们很容易理解。使用几个 n 值，模式很快就会出现。像这样的简单结果很容易被低估；然而，任何完全理解的结果都是值得庆祝的，这个结果将导致其他结果。

<u>结果</u>：1 x n 表：球将进行 n-1 次反弹。如果 n 是偶数，球将在右下角结束，如果 n 是奇数，球将在右上角结束。

下一个最简单的表是 2 x n。这里的模式有点复杂。良好的记录保存可以在这样的事情上产生很大的不同。细心的实验者会注意到 2 x 4 表的行为就像 1 x 2 表，而 2 x 6 表就像 1 x 3。这很快就会推广到下一个结果。

<u>结果</u>：2 x 2xn 表的行为就像 1 x n 表。

为什么是这样？到底是怎么回事？这是一个要灌输给您孩子的数学过程——寻找模式，然后寻求理解它们，并通过这种新的理解扩展您之前的结果。

正在发生的事情是，如果您将两个维度都放大相同的系数，桌子上的反弹不会改变。完成后，桌子更大，但几何形状相同。在几何学术语中，这两个表被认为是“相似的”。

<u>结果</u>：kxm x kxn 表的行为与 m x n 表完全相同。

我们已经一步步走到了这里，但这是一个很大的结果。这意味着我们可以通过首先删除任何公因子来开始对任何表的分析。

从我们停下来的地方继续 2 x n 表。我们理解当 n 为偶数时会发生什么，但是当 n 为奇数时会发生什么？对于 n = 1、3、5、7 等，2 x n 会发生什么？该模式很快变得很容易看到。

<u>结果</u>: 当 n 为奇数时，一个 2 x n 的桌子有 n 次弹跳并最终出现在左上角。

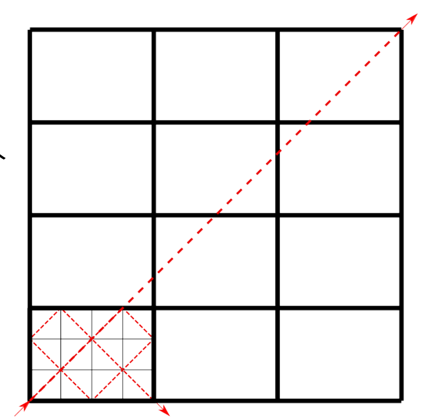
正在取得很多进展。玩更多的例子会导致更多的模式。

<u>结果</u>: 如果 n 不是 3 的倍数，如果 n 除以 3 的余数为 1，则 3 x n 表有 n+1 次反弹并在右上角结束，如果 n 有一个余数，则在右下角结束除以 3 的余数为 2。如果 n 为奇数，则 4 x n 表有 n + 2 次反弹并在左上角结束。如果 n 不是 5 的倍数，则一个 5 x n 的表有 n+3 次反弹，当 n 为奇数时返回到右上角，当 n 为偶数时返回到右下角。

在这一点上，我们很想查看数据，看到一些模式，并做出一些猜测。

<u>猜想</u>: 假设 k 和 n 没有共同的因子。然后 ak by n 表将有 k + n - 2 次反弹。如果 k 是偶数，它将在左上角结束。如果 k 为奇数且 n 为奇数，它将在右上角结束，如果 k 为奇数且 n 为偶数，则在右下角结束。

哇——如果这个猜想是真的，我们就彻底解决了这个问题！你知道接下来会发生什么……让我们看看我们是否能解释为什么这个猜想应该是真的（或者发现它是假的）。



尽管有其他方法可以理解这种情况，但有时会发生这种情况，但使这个问题更容易理解的是一个新想法。你可能不会想到，但一旦你看到它，你可能会感到惊讶。这个想法是展开桌子，让球可以直线前进！如果我们展开原始的 3 x 4 桌子并将球的路径变成一条直线，会发生以下情况。

现在看到猜想是真的容易多了。反弹对应于交叉线 - 其中有 (k - 1) 个在一个方向交叉，其中 (n - 1) 个在另一个方向交叉，所以总共有 (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 条线交叉。看到它最终在哪个角落是跟踪事情如何展开的问题。我们现在已经完成了一段非常有趣的旅程。

— 用形状填充区域 — 介绍 —

假设您有一个 8 x 8 的棋盘，并且您有一个 1 x 2 的瓷砖集合。找到一种用 32 个这样的 1 x 2 瓷砖精确覆盖棋盘的方法很简单。

让我们开始从棋盘上移除一些方块，看看会发生什么。如果你移除棋盘的一个角，你马上就会知道你不能再用瓷砖覆盖棋盘，因为瓷砖总是覆盖偶数个方格，现在有 63 个方格要覆盖。好的，去掉两个角，得到偶数个剩余的正方形——你现在能盖住它吗？答案取决于您移除了哪两个角。为什么？如果您不再限制自己去除角落，那会发生什么？

— 用形状填充区域 — 分析 —

在揭示着色想法之前让您的孩子玩这个。如果他们玩小板，他们可能会自己发现规则，这总是更好。

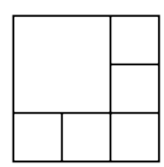
对这个问题有很大帮助的一个观察是使用棋盘格的颜色。如果你拿 1 x 2 的瓷砖并将一个正方形涂成白色，另一个黑色，你会看到一件有趣的事情发生。每块瓷砖必须覆盖每种颜色的正方形。 k 个瓷砖不仅会覆盖 2xk 个方块，而且它们会覆盖 k 个白色方块和 k 个黑色方块——每种颜色的方块数量相同。使用这个想法，很明显，如果你移除的一种颜色的方块多于另一种颜色，就不可能覆盖板子。

如果您的孩子喜欢这些问题，请开始扩展到使用其他形状来填充黑板。用 1 x 3 瓷砖或 3 个 L 形方块填充它。你从这些中发现了哪些模式和规则？玩什么其他形状可能很有趣？

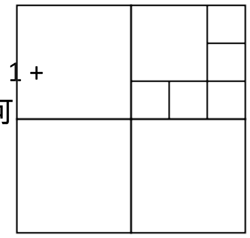
— 用正方形填充正方形 - 介绍 —

您可以用哪些方法用其他正方形填充正方形，而其他正方形不需要都具有相同的大小？但是，长度不能完全是随机数——每个正方形的边长必须是固定长度的整数倍。需要调查的问题是：所有可能的平方数是多少？另外，如果您知道一个数字是可能的，是否有一种简单的方法来描述如何做到这一点？

让您的孩子玩几天，不要急于找到答案。有许多不同的方法可以为这项调查提出想法，所以要灵活处理孩子的想法。这是一个图表，显示了 6 是如何可能的。



想出一些简单的例子总是一个好主意。作为一个简单的开始，将大正方形分成相同大小的正方形。从此你知道平方数（1、4、9、16、25……）都有效。



处理 6 个正方形的例子，我们可以使用一个任意大小的大正方形，并在它的两条边上放置 1 x 1 的正方形。对更大的正方形（1 x 1、2 x 2、3 x 3……）这样做，我们得到 1 + 3 = 4、1 + 5 = 6（如图）、1 + 7 = 8、1 + 9 = 10 ， 等等。因此，所有以 4 开头的偶数都可以通过这种方式完成。

一个快速总结这一点的强大想法是看到我们可以采用一个有效的图表，并用另一个有效的图表替换其中的一个方块。因此，例如，如果您将一个简单的 2 x 2 填充为 4 个 1 x 1 的正方形，并将其中一个 1 x 1 的正方形替换为 6 个正方形的示例，则会得到右图所示的 9 个正方形。

因为一个正方形正在被一个 n 方图取代，所以正方形数量的净变化是将其中的 n-1 个相加。这意味着我们可以取一个有效的数字，并将比它小 1 的倍数加到任何其他有效的数字上。特别是，我们可以将 4 -1 = 3 的倍数加到任何其他有效的数字上——最容易加 3 的是所有以 4 开头的偶数。

把所有这些放在一起说数字 1, 4, 6, 7, 8, 9, ... 都有效，而且很容易看到至少一种构造它们的简单方法。也很容易让自己相信 2、3 和 5 是不可能的。

如果您的孩子喜欢探索这个问题，探索这个主题的变化。假设您只允许使用特定大小的正方形 - 例如 1 x 1、2 x 2 和 3 x 3。或者可能只允许 2 x 2 和 3 x 3。看看哪些问题会导致有趣的结果，哪些问题不那么有趣.

另一个需要注意的方向是用具有相同形状的图形填充其他图形。例如，对正三角形（所有边都相同的三角形）问同样的问题。以这种方式调查有些数字很有趣，有些则根本不有趣——哪些是？

第 5 章 - 产品游戏

— 介绍 —

使用一张共享的纸，填写如下：

第一个玩家将一个代币移动到底行 1-9 方格中从 1 到 9 的任何数字上。第二个玩家将另一个标记放在底行的 1-9 个方格中的一个，并在 6 x 6 的网格中领取产品。从那时起，每个玩家选择移动两个代币中的一个并获得产品（如果可以的话）。第一个连续占据 3 个方格的玩家获胜。将 6 x 6 网格中的产品编号混合起来，让您的孩子更好地练习识别产品。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

这些游戏板可以制作成您喜欢的大小，尽管它们很快就会变得非常大。这里有一些较大的板子，它们下面有相应的更大的数字范围。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

带有红色星星的方格是“免费”方格，可以根据需要供任何一方使用。

第 5 章 - 有限的计算器

— 介绍 —

假设您有一个严重损坏的计算器，并且您面临在计算器上产生一些结果的挑战。您可以想出各种各样的场景，这些场景可以通过快速的拼图描述提供有趣的挑战。每当您有空闲时间时，都可以轻松地口头进行这项活动。以下是一些帮助您入门的示例。

虽然有些时候这些问题会涉及更深层次的数学，但大多数情况下，这些问题完全是为了玩它们的乐趣。

1a) 假设您有一个带有 +、-、x 和 / 的计算器，但只有一个有效的数字键 4。您能得到结果 21 吗？如果是这样，您需要的最少步骤数是多少？

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21 是一种方法，但还有许多其他方法可以做到。另一个是 4 x (4 + 4/4) + 4/4。目标是四处玩耍并享受探索。

1b) 假设您最多可以使用 4 次 - 您可以得出哪些数字？假设您必须恰好四次使用 4。

随着孩子数学资源的增加，四个 4 的问题是一个有趣的难题。在这一点上，您孩子的选择非常有限，但玩起来仍然很有趣。在不除法或不使用小数的情况下计算许多数字将特别困难。不要担心按顺序列出所有数字——只要尽可能多地列出不同的数字。

这里有几个例子只是为了让你开始。

1 = (4/4) x (4/4) = 44 / 44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4 - 4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44 / 4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) 尝试使用其他单个数字并创建其他结果。

2a) 假设你的计算器只能加 4 或 7。你能得出哪些数字？

这是我们已经多次看到的结果。从 (4 - 1) x (7 - 1) 开始，您可以通过将 4 和 7 的倍数相加得到所有数字。18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7，依此类推。

2b) 假设它有 4 或 7，但它可以加减。你能得出哪些数字？

您可以通过这种方式生成所有数字。

2c) 用其他数字对替换 4 和 7。这些对会发生什么？

在数论中，这称为 Bezout 定理。结果表明，通过组合两个数的倍数，您可以生成两个数的最大公约数的任意倍数。

3) 假设您只有一个 1 键并且只能添加或加倍。例如，2 x (2 x 1) + 1 是 5。您还能创建哪些其他数字？

这是一个关于变相二进制数的问题。对于您的孩子来说，意识到或理解这一点并不重要，重要的是玩耍。任何数都可以写成二进制，所以所有数都可以通过加倍加1来实现。例如，21是16 + 4 + 1。所以，21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

第 5 章 - 双重或无

— 介绍 —

玩家通过秘密选择 5 个大于 20 且不大于 120 的不同数字开始游戏。看他们。使用号码卡或其他一些设备，可以创建一个从 1 到 20 的随机数。该数字反复加倍，直到某人的号码第一次被击中或该号码大于 120。第一个击中所有五个号码的玩家是赢家。

— 分析 —

问题是：要选择的最佳五个数字是什么？这里有一些想法需要考虑。

<u>规则</u>: 总是选择一个 1 到 20 的 2 次幂的数字。

如果你选择 23 或 46 这样的数字，他们永远不会被击中，你肯定会输。

<u>规则</u>: 永远不要选择一个你可以选择但没有选择的数字的两倍。

如果你选择 44，为什么不选择 22 呢？如果对方选择 22，您将错过一轮。

<u>进一步分析</u>: 从 1 到 20 的数字同样有可能被选中。但是，因为 9 导致 18，所以 18 作为起点的可能性是 11 的两倍。如果将这些方法结合起来获得不同的起点，起点的概率如下：

11 - 1/20（来自 11）

12 - 3/20（来自 3、6 和 12）

13 - 1/20（来自 13）

14 - 2/20（来自 7 和 14）

15 - 1/20（来自 15）

16 - 5/20（来自 1、2、4、8 和 16）

17 - 1/20（来自 17）

18 - 2 /20（来自 9 和 18）

19 - 1/20（来自 19）

20 - 3/20（来自 5、10 和 20）16、12 和 20 的

显然，最好使用的数字是倍数。一个简单的策略是使用五个数字：32、64、24、48 和 40。这些数字不会总是赢，但随着时间的推移，它们应该对你很好。