⚠本章用谷歌翻譯翻譯—— 請幫助我們改進這一點！

Early Family Math

第 5 章獎勵材料

— 介紹 —

您是否希望在課程的有意簡短描述中包含更多示例、討論和評論？如果是這樣，那麼您來對地方了！該文件包含第 5 章中某些活動的獎勵材料。

對於謎題，提供了許多已解決謎題的示例，以及有關如何創建它們的附加評論。早期家庭數學計劃基於這樣一種理念，即早期數學是一個家庭應該一起做的事情，為您的孩子製作拼圖是該過程的重要組成部分。一旦你掌握了每個謎題的竅門，你就會發現大部分謎題對你來說都很容易創建。

許多這些謎題都有不同的難度級別，在接下來的頁面中有許多關於如何創建這些級別的建議和示例。總是從最簡單的謎題開始。讓您的孩子在有點太簡單的謎題中體驗成功、理解和樂趣要好得多，而不是因為太難的謎題而感到沮喪、氣餒和過度挑戰。一旦您的孩子建立了對數學活動的信心和熱情，那就是慢慢融入更大挑戰的時候了。此外，並不是所有的謎題都會對每個人來說都很有趣，所以不要推送看似沒有聯繫的謎題和活動。

這是您將在以下頁面中找到的內容：

- **第 5 章 — Nim 與因素**
- **第 5 章 — Eratosthenes 的篩分**
- **第 5 章 — 槓桿和移動設備**
- **第 5 章 — 劃分盒子**
- **第 5 章 — 字母替換拼圖**
- **第 5 章 — 調查 — 玩形狀**
- **第 5 章 — 產品遊戲**
- **第 5 章 — 有限的計算器**
- **第 5 章 — 加倍或無**

Chapter 5 — Nim with Factors

— 介紹 —

從任何數字開始，比如 20。讓孩子決定是先走還是第二走。在他們的回合中，玩家可以從數字中減去當前數字的任何除數。玩家被迫 0 輸。

— 分析 —

像往常一樣，了解這款遊戲的一個好策略是查看遊戲的更簡單版本，在這種情況下，這意味著從非常小的數字開始。如果輪到您並且您面臨這些數字中的每一個，那麼將會發生以下情況：1 - 輸，2 - 贏，3 - 輸，4 - 贏，5 - 輸，6 - 贏，7 輸和 8 贏。到現在為止，模式已經很清楚了——如果這是你的舉動並且你有一個奇數，那麼你就會輸；如果您有偶數，那麼您將獲勝。

找到製勝策略是一大步，但讓我們更深入。為什麼這樣做？造成這種情況的奇數和偶數的屬性是什麼？把這個問題擺在你的孩子麵前，給他們很多時間去思考和試驗——不要著急，這個與問題搏鬥的過程是非常寶貴的，不應該被短路。

一些小數字的實驗很快就會揭示出正在發生的事情。如果你有一個奇數，所有的除數都是奇數，所以當你減去任何一個除數時，結果是偶數。因此，一圈的奇數總是導致下一圈的偶數。偶數總是有奇數和偶數作為除數。所以，情況不太一樣。然而，如果你有一個偶數，你的目標是給你的對手一個奇數，有一個簡單的方法 - 選擇除數 1 並減去它！

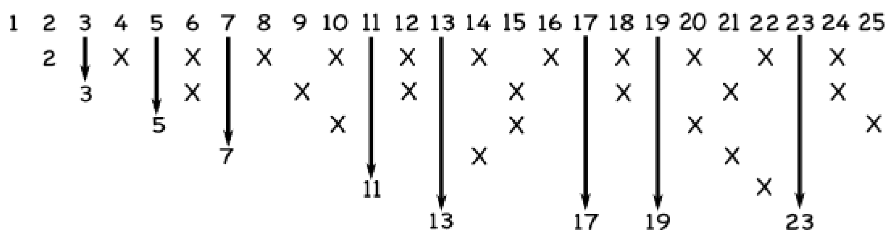
第 5 章 — 埃拉托色尼的篩分法

— 介紹 —

從 1 到 25 的數字線開始 - 如果空間和耐心允許，可以使用更大的範圍。

在其下方寫下數字 2。即使有這 2 行，也將 X 放在 2 的每個倍數的下方。

現在，拉下第一個沒有 X 的數字（在本例中為 3）並將其放在下一行。寫下 3 並將 X 放在該行的所有倍數上。繼續這樣。最後，您將拉下所有質 數。請記住，1 是一個 單位 而不是素數！



— 分析 —

這個簡單的過程揭示了一些關於素數的有趣事實。看看您的孩子是否能提出其中一些問題——但是，如果它們不是自然產生的，這裡有一些問題要問。

1）為什麼數字會下降素數?

假設你有一個合數。我們想表明這個數字下面會有一個 X。作為複合，它可以被 1 和該數字之間的某個數字 n 整除。如果 n 是素數，那麼我們的合數下面會有一個 X，因為 n 是更早的素數。如果 n 不是素數，那麼它下面有一個來自某個較早素數的 X，稱為 p。現在，p 整除 n，n 整除我們的新數，所以 p 必須整除我們的新數。因此，在標記 p 的倍數時，我們會在新數字下放置一個 X。

2) 當您為素數的倍數放置 X 時，有些數字已經有來自較早素數的 X。什麼時候發生，什麼時候不發生?

讓我們看看上面篩子中 5 的倍數。 5 x 2、5 x 3 和 5 x 4 的倍數已經被劃掉了。只有 5 x 5 是新的。發生這種情況是因為 5 x 2、5 x 3 和 5 x 4 都是 2 和 3 的倍數，更早的素數。如果我們想把 X 放在新的地方，我們必須將 5 乘以只有 5 及以上的素因數的數字。因為跟踪所有這些有點乏味，所以有些人所做的只是劃掉奇數倍並留在那裡。

3) 對於這個篩子，最後一個在其行中有一個有用的新 X 的素數是什麼?

在這個篩子中，有用 X 的素數是 2、3 和 5。7 和 11 的倍數都是舊 X。如果您查看最後一個問題的答案，您將在此處看到答案。獲得新 X 的唯一方法是將一個素數乘以大於或等於其自身的素數。一旦我們達到像 7 這樣的質數，其中 7 x 7 > 25，我們就不需要檢查它。所以，我們只需要檢查平方小於或等於最後一個數字的素數。

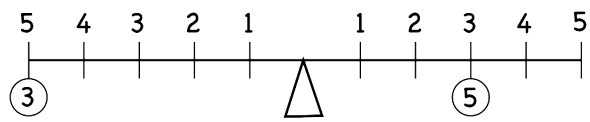
4) 如果給你一個數，比如 53，你需要用哪些素數除以它才能看出它是素數?

從上一個問題的答案來看，我們只需要檢查平方小於或等於 53 的素數。那些素數是 2、3、5 和 7——這些素數都不能整除 53，所以 53 一定是素數！

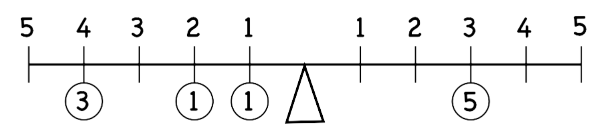
第 5 章—槓桿和移動體

— 槓桿 —

槓桿原理指出，質量施加在槓桿一側的力等於質量乘以它與支點支點的距離。



在上面的槓桿中，左邊的 3 離支點的距離是 5，所以它的力是 3 x 5 = 15。右邊的 5 離支點的距離是 3，所以它的力是 5 x 3 = 15。這個槓桿處於平衡狀態。



如果一側有多個重物，則這些力會相加。

在這個槓桿中，左側有 3 x 4 + 1 x 2 + 1 x 1 = 15，右側有 5 x 3 = 15。所以它是平衡的。

我們將這些問題限制為僅使用整數。您可以決定是否允許將多個權重掛在同一點上——我們將假設在接下來的討論中可以進行多個權重。

— 槓桿拼圖 —

你有一個 3 個單位的重量和一個 5 個單位的重量放在支點的兩側。他們應該在哪里平衡？答案可以是距離 5 和 3，但也可以是 10 和 6，或者甚至更大的答案，例如 15 和 9。開放討論您孩子提出的任何問題。

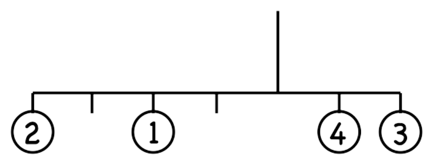
如果你有一個 3 個單位和一個 5 個單位的重物放在槓桿的一側，你可以在另一側的距離上放哪些重物？這個問題延續了第 4 章末尾“讓它算數”頁面上的問題。和以前一樣，探索不同的權重組合。如果 3 和 5 被 4 和 5、4 和 9 或 6 和 9 代替會發生什麼？

如果我們將 3 個單位和 5 個單位的重量放在支點的兩側，最後一個問題會如何變化？現在很容易用 3 x 2 = 5 x 1 + 1 x 1 稱一個 1 個單位的重量。你還能用這種方法稱其他哪些重量？

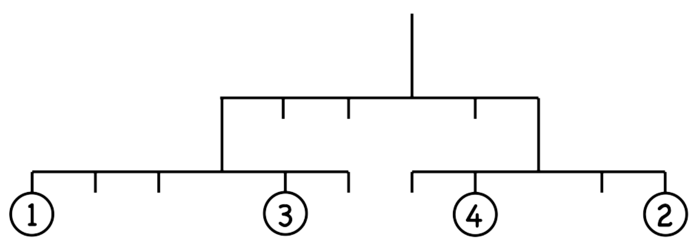
— 移動設備 — 為

您提供了一些權重和帶有一些連接點的移動設備的設計。挑戰在於每個連接點最多放置一個重量，以便移動設備沿每條手臂保持平衡。為了解決這些問題，我們將假設製造手機的電線是無重量的。手機中的每個手臂都是一個需要平衡的槓桿，所以這些謎題是槓桿平衡的延伸 - 在開始之前練習這些謎題。

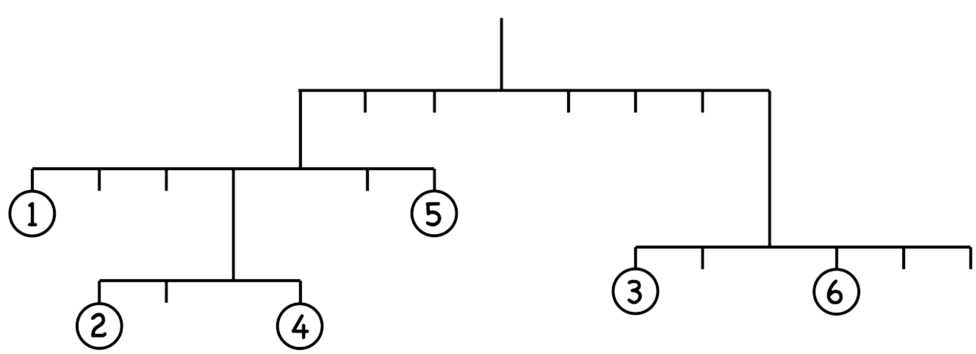
從最簡單的手機開始，它們只是空中的槓桿。這是將重量從 1 到 4 放在此移動設備上以平衡它的解決方案。這作為一個槓桿，支點在懸掛點。對於這個移動設備，我們有 2 x 4 + 1 x 2 = 4 x 1 + 3 x 2。



如果移動設備有多個級別，那麼每個級別上的每個單獨的手臂都必須作為槓桿進行平衡。對於下一個移動，底部的兩個臂平衡，因為 1 x 3 = 3 x 1 和 4 x 1 = 2 x 2。對於下一個級別，您只需將其下方的權重相加。例如，左側的重量是 1 + 3 = 4 – 就下一級而言，重量位於下臂的哪個位置無關緊要。因此，對於下一個級別，(1 + 3) x 3 = (4 + 2) x 2 = 12，因此頂層也會平衡。



為彼此製作移動拼圖玩得開心。這是使用從 1 到 6 的每個數字的最後一個。不要擔心花哨和使用每個數字一次。任何完成的拼圖都會很有趣。檢查我們的級別：2 x 2 = 4 x 1； 1 x 4 + (2 + 4) x 1 = 5 x 2； 3 x 2 = 6 x 1；和 (1 + 2 + 4 + 5) x 3 = (3 + 6) x 4。



第 5 章 — 劃分盒子

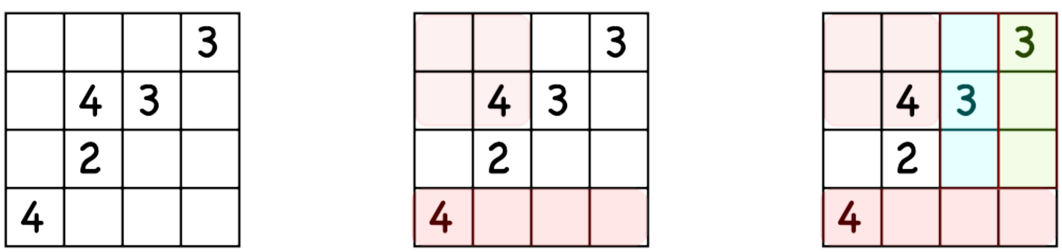
— 介紹 —

一個 4 x 4 或更大的矩形，在它的一些正方形中帶有數字，是分成更小的矩形。每個數字必須以一個單獨的矩形結束，其面積為該數字。

對於成年人來說，構建這些謎題很簡單。取一個矩形，將其內部劃分為多個矩形，在每個內部矩形內輸入區域的數字，然後去除內部矩形的任何符號。唯一棘手的部分是將數字放在使謎題相當容易解決的位置 - 如果您的謎題最終太難，您可以隨時根據需要給出提示。

— 解決策略 —

以下是一些可以簡化解決這些難題的通用策略。盡最大努力讓您的孩子在玩拼圖時發現這些規則。列出他們提出的規則。



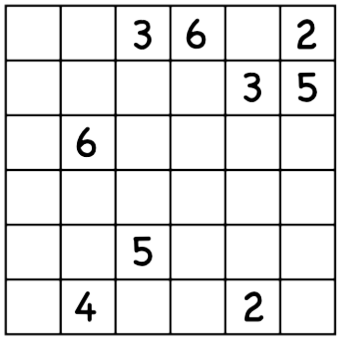
1) 看數字只有一兩個選項的矩形。

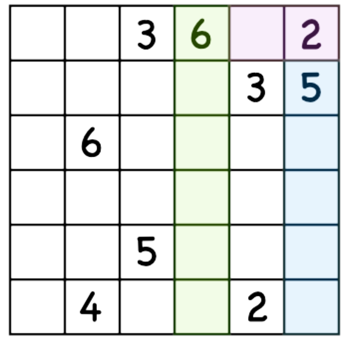
兩個 4 都受到高度限制。每個 4 只能在 1 x 4 或 2 x 2 矩形內。上面的 4 被捲邊，所以它不能在 1 x 4 的內部。因此，左上角必須有一個 2 x 2 的矩形。這使得下方的 4 只可能其矩形為 1 x 4 並沿著底邊延伸。

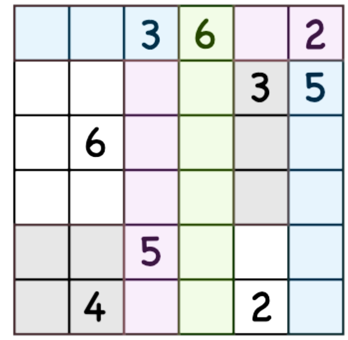
2) 看素數——它們必須在一個 1 x n 的矩形內。

上面拼圖中的 3 必須包含在一個 1 x 3 的矩形中。右上角的 3 只能是沿頂部邊緣或沿右側的 1 x 3 矩形的一部分。左上角的 2 x 2 正方形被 4 擋住，使得沿著頂部邊緣不可能有 1 x 3。

沿底部的 1 x 4 迫使兩個 3 中較低的 1 x 3 成為兩個垂直可能性中較高的一個。







3) 接近最大維數的數字通常很少有選擇。

看看下一個謎題中的 6 和 5。最上面的 6 個需要很大的空間，唯一有足夠空間的方法是垂直垂直向下，用完整個列。其他 6 不能是 1 x 6，因為該行被其他 6 的列截斷了。所以，下面的 6 一定是 2 x 3，這還不是很確定。

再舉一個例子，如果這個拼圖中有一個 8，那麼 1 x 8 就不適合，所以它必須是 2 x 4 矩形的一部分。

4) 被裝箱的方格幾乎沒有選擇。

最上面的 5 被裝箱，所以唯一的選擇是在 5 箱列中。其他 5，因為它也是素數，必須垂直或水平。它被 6 的列水平切斷，因此它必須垂直向上到 3 的正下方。

5) 角落通常受到高度限制。

右上角的 2 必須是水平的，所以很容易填寫。

第 5 章 — 字母替換拼圖

— 介紹 —

一旦您的孩子對本章前面幾頁中的缺失數字拼圖感到滿意，他們就可以開始玩這些謎題。在這些中，一位或多位數字被字母替換。字母的三個規則是：

- 給定的字母總是相同的數字 數字
- 的最左邊的數字永遠不會是 0
- 不同的字母必須是不同的數字數字來

通過解決加法或減法問題並替換一個或多個創建這些謎題。還可以創建拼圖來為您的孩子製作有趣的解決問題的挑戰。請注意，字母的值不會從拼圖轉移到拼圖。

— 示例 —

第一個示例說明瞭如何解決標準的加法或減法問題並從中製作字母替換難題。第一個版本用 A 替換了所有 6，第二個版本繼續用 B 替換了 2。

$$
\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array}
\dashrightarrow
\begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}
\quad
\begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}
$$

這些示例的其餘部分都經過精心構建，以允許使用特定情況的屬性進行求解。需要注意的一個特性是，當您將兩個數字相加時，下一列的進位始終為 0 或 1。因此，例如，在問題 A + A = C4 中，C 必須為 1，因為不允許為 0.

$$
\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array}\quad
\begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}\quad
\begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}
$$

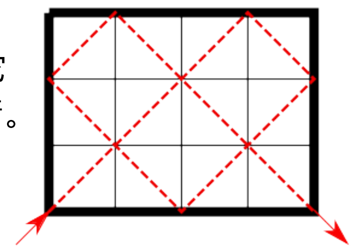
$$
\begin{array}{r} A \\ A \\ +A \\ \hline B2 \end{array}\quad
\begin{array}{r} C \\ C \\ +C \\ \hline D4 \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ A \\ +7 \\ \hline B \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ A \\ +B \\ \hline B0 \end{array}\quad
\begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array}\quad
\begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}\quad
\begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array}\quad
\begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array}\quad
\begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array}\quad
\begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array}\quad
\begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}
$$

第 5 章 — 玩形狀

— 彈跳台球 — 介紹 —

想像一張台球桌，每個角落都有一個口袋。當球從桌子的一側彈開時，它會以與進入時相同的角度彈開。如果我們從左下角以 45 度角射球，它最終會在哪裡？答案取決於桌子的大小。右圖是 3 x 4 桌子上發生的事情。



給您的孩子一張桌子，並挑戰您的孩子預測哪個角落會先被擊中，以及在到達那個角落之前需要彈跳多少次。

— 彈跳台球 — 分析 —

首先讓您的孩子玩這個，不要急於發現結果。正如您將看到的，這個問題涉及到一個年輕人的一些複雜的想法。根據需要，提出一兩個問題，讓他們的思考更有條理。你知道接下來會發生什麼——先看看更簡單的表格來尋找模式——當這個想法對你的孩子來說是自動的，這將對他們的餘生有益！

最簡單的表是 1 x n，它們很容易理解。使用幾個 n 值，模式很快就會出現。像這樣的簡單結果很容易被低估；然而，任何完全理解的結果都是值得慶祝的，這個結果將導致其他結果。

結果： 1 x n 表： 球將進行 n-1 次反彈。如果 n 是偶數，球將在右下角結束，如果 n 是奇數，球將在右上角結束。

下一個最簡單的表是 2 x n。這裡的模式有點複雜。良好的記錄保存可以在這樣的事情上產生很大的不同。細心的實驗者會注意到 2 x 4 表的行為就像 1 x 2 表，而 2 x 6 表就像 1 x 3。這很快就會推廣到下一個結果。

結果：2 x 2xn 表的行為就像 1 x n 表。

為什麼是這樣？到底是怎麼回事？這是一個要灌輸給您孩子的數學過程——尋找模式，然後尋求理解它們，並通過這種新的理解擴展您之前的結果。

正在發生的事情是，如果您將兩個維度都放大相同的係數，桌子上的反彈不會改變。完成後，桌子更大，但幾何形狀相同。在幾何學術語中，這兩個表被認為是“相似的”。

結果：kxm x kxn 表的行為與 m x n 表完全相同。

我們已經一步步走到了這裡，但這是一個很大的結果。這意味著我們可以通過首先刪除任何公因子來開始對任何表的分析。

從我們停下來的地方繼續 2 x n 表。我們理解當 n 為偶數時會發生什麼，但是當 n 為奇數時會發生什麼？對於 n = 1、3、5、7 等，2 x n 會發生什麼？該模式很快變得很容易看到。

<u>結果</u>：當 n 為奇數時，一個 2 x n 的桌子有 n 次彈跳並最終出現在左上角。

正在取得很多進展。玩更多的例子會導致更多的模式。

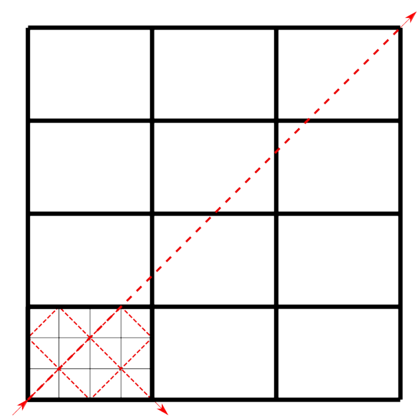
<u>結果</u>：如果 n 不是 3 的倍數，如果 n 除以 3 的餘數為 1，則 3 x n 表有 n+1 次反彈並在右上角結束，如果 n 有一個餘數，則在右下角結束除以 3 的餘數為 2。如果 n 為奇數，則 4 x n 表有 n + 2 次反彈並在左上角結束。如果 n 不是 5 的倍數，則一個 5 x n 的表有 n+3 次反彈，當 n 為奇數時返回右上角，當 n 為偶數時返回右下角。

在這一點上，我們很想查看數據，看到一些模式，並做出一些猜測。

<u>猜想</u>：假設 k 和 n 沒有共同的因子。然後 ak by n 表將有 k + n - 2 次反彈。如果 k 是偶數，它將在左上角結束。如果 k 為奇數且 n 為奇數，它將在右上角結束，如果 k 為奇數且 n 為偶數，則在右下角結束。

哇——如果這個猜想是真的，我們就徹底解決了這個問題！你知道接下來會發生什麼……讓我們看看我們是否能解釋為什麼這個猜想應該是真的（或者發現它是假的）。

儘管有其他方法可以理解這種情況，但有時會發生這種情況，但使這個問題更容易理解的是一個新想法。你可能不會想到，但一旦你看到它，你可能會感到驚訝。這個想法是展開桌子，讓球可以直線前進！如果我們展開原始的 3 x 4 桌子並將球的路徑變成一條直線，會發生以下情況。



現在看到猜想是真的容易多了。反彈對應於交叉線 - 其中有 (k - 1) 個在一個方向交叉，其中 (n - 1) 個在另一個方向交叉，所以總共有 (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 條線交叉。看到它最終在哪個角落是跟踪事情如何展開的問題。我們現在已經完成了一段非常有趣的旅程。

— 用形狀填充區域 — 介紹 —

假設您有一個 8 x 8 的棋盤，並且您有一個 1 x 2 的瓷磚集合。找到一種用 32 個這樣的 1 x 2 瓷磚精確覆蓋棋盤的方法很簡單。

讓我們開始從棋盤上移除一些方塊，看看會發生什麼。如果你移除棋盤的一個角，你馬上就會知道你不能再用瓷磚覆蓋棋盤，因為瓷磚總是覆蓋偶數個方格，現在有 63 個方格要覆蓋。好的，去掉兩個角，得到偶數個剩餘的正方形——你現在能蓋住它嗎？答案取決於您移除了哪兩個角。為什麼？如果您不再限制自己去除角落，那會發生什麼？

— 用形狀填充區域 — 分析 —

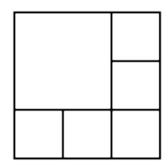
在揭示著色想法之前讓您的孩子玩這個。如果他們玩小板，他們可能會自己發現規則，這總是更好。

對這個問題有很大幫助的一個觀察是使用棋盤格的顏色。如果你拿 1 x 2 的瓷磚並將一個正方形塗成白色，另一個黑色，你會看到一件有趣的事情發生。每塊瓷磚必須覆蓋每種顏色的正方形。 k 個瓷磚不僅會覆蓋 2xk 個方塊，而且它們會覆蓋 k 個白色方塊和 k 個黑色方塊——每種顏色的方塊數量相同。使用這個想法，很明顯，如果你移除的一種顏色的方塊多於另一種顏色，就不可能覆蓋板子。

如果您的孩子喜歡這些問題，請開始擴展到使用其他形狀來填充黑板。用 1 x 3 瓷磚或 3 個 L 形方塊填充它。你從這些中發現了哪些模式和規則？玩什麼其他形狀可能很有趣？

— 用正方形填充正方形 — 介紹 —

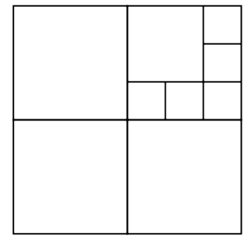
您可以用哪些方法用其他正方形填充正方形，而其他正方形不需要都具有相同的大小？但是，長度不能完全是隨機數——每個正方形的邊長必須是固定長度的整數倍。需要調查的問題是：所有可能的平方數是多少？另外，如果您知道一個數字是可能的，是否有一種簡單的方法來描述如何做到這一點？



讓您的孩子玩幾天，不要急於找到答案。有許多不同的方法可以為這項調查提出想法，所以要靈活處理孩子的想法。這是一個圖表，顯示了 6 是如何可能的。

想出一些簡單的例子總是一個好主意。作為一個簡單的開始，將大正方形分成相同大小的正方形。從此你知道平方數（1、4、9、16、25……）都有效。

處理 6 個正方形的例子，我們可以使用一個任意大小的大正方形，並在它的兩條邊上放置 1 x 1 的正方形。對更大的正方形（1 x 1、2 x 2、3 x 3……）這樣做，我們得到 1 + 3 = 4、1 + 5 = 6（如圖）、1 + 7 = 8、1 + 9 = 10， 等等。因此，所有以 4 開頭的偶數都可以通過這種方式完成。



一個快速總結這一點的強大想法是看到我們可以採用一個有效的圖表，並用另一個有效的圖表替換其中的一個方塊。因此，例如，如果您將一個簡單的 2 x 2 填充為 4 個 1 x 1 的正方形，並將其中一個 1 x 1 的正方形替換為 6 個正方形的示例，則會得到右圖所示的 9 個正方形。

因為一個正方形正在被一個 n 方圖取代，所以正方形數量的淨變化是將其中的 n-1 個相加。這意味著我們可以取一個有效的數字，並將比它小 1 的倍數加到任何其他有效的數字上。特別是，我們可以將 4 -1 = 3 的倍數加到任何其他有效的數字上——最容易加 3 的是所有以 4 開頭的偶數。

把所有這些放在一起說數字 1, 4, 6, 7, 8, 9, ... 都有效，而且很容易看到至少一種構造它們的簡單方法。也很容易讓自己相信 2、3 和 5 是不可能的。

如果您的孩子喜歡探索這個問題，探索這個主題的變化。假設您只允許使用特定大小的正方形 - 例如 1 x 1、2 x 2 和 3 x 3。或者可能只允許 2 x 2 和 3 x 3。看看哪些問題會導致有趣的結果，哪些問題不那麼有趣.

另一個需要注意的方向是用具有相同形狀的圖形填充其他圖形。例如，對正三角形（所有邊都相同的三角形）問同樣的問題。以這種方式調查有些數字很有趣，有些則根本不有趣——哪些是?

第 5 章 — 產品遊戲

— 介紹 —

使用一張共享的紙，填寫如下：

第一個玩家將一個代幣移動到底行 1-9 方格中從 1 到 9 的任何數字上。第二個玩家將另一個標記放在底行的 1-9 個方格中的一個，並在 6 x 6 的網格中領取產品。從那時起，每個玩家選擇移動兩個代幣中的一個並獲得產品（如果可以的話）。第一個連續佔據 3 個方格的玩家獲勝。將 6 x 6 網格中的產品編號混合起來，讓您的孩子更好地練習識別產品。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9

這些遊戲板可以製作成您喜歡的大小，儘管它們很快就會變得非常大。這裡有一些較大的板子，它們下面有相應的更大的數字範圍。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

帶有紅色星星的方格是“免費”方格，可以根據需要供任何一方使用。

第 5 章 — 有限的計算器

— 介紹 —

假設您有一個嚴重損壞的計算器，並且您面臨在計算器上產生一些結果的挑戰。您可以想出各種各樣的場景，這些場景可以通過快速的拼圖描述提供有趣的挑戰。每當您有空閒時間時，都可以輕鬆地口頭進行這項活動。以下是一些幫助您入門的示例。

雖然有些時候這些問題會涉及更深層次的數學，但大多數情況下，這些問題完全是為了玩它們的樂趣。

1a) 假設您有一個帶有 +、-、x 和 / 的計算器，但只有一個有效的數字鍵 4。您能得到結果 21 嗎? 如果是這樣，您需要的最少步驟數是多少?

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21 是一種方法，但還有許多其他方法可以做到。另一個是 4 x (4 + 4/4) + 4/4。目標是四處玩耍並享受探索。

1b) 假設您最多可以使用 4 次 - 您可以得出哪些數字? 假設您必須恰好四次使用 4。

隨著孩子數學資源的增加，四個 4 的問題是一個有趣的難題。在這一點上，您孩子的選擇非常有限，但玩起來仍然很有趣。在不除法或不使用小數的情況下計算許多數字將特別困難。不要擔心按順序列出所有數字——只要盡可能多地列出不同的數字。

這裡有幾個例子只是為了讓你開始。

1 = (4/4) x (4/4) = 44 / 44

2 = 4 / ((4 + 4) / 4)

3 = (4 + 4 + 4) / 4

4 = (4 - 4) x 4 + 4

6 = 4 + (4 + 4) / 4

7 = 44 / 4 - 4

8 = (4 + 4) x (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4

32 = 4 x 4 + 4 x 4

1c) 嘗試使用其他單個數字並創建其他結果。

2a) 假設你的計算器只能加 4 或 7。你能得出哪些數字?

這是我們已經多次看到的結果。從 (4 - 1) x (7 - 1) 開始，您可以通過將 4 和 7 的倍數相加得到所有數字。18 = 2 x 7 + 4, 19 = 3 x 4 + 7, 20 = 5 x 4, 21 = 3 x 7，依此類推。

2b) 假設它有 4 或 7，但它可以加減。你能得出哪些數字?

您可以通過這種方式生成所有數字。

2c) 用其他數字對替換 4 和 7。這些對會發生什麼?

在數論中，這稱為 Bezout 定理。結果表明，通過組合兩個數的倍數，您可以生成兩個數的最大公約數的任意倍數。

3) 假設您只有一個 1 鍵並且只能添加或加倍。例如，2 x (2 x 1) + 1 是 5。您還能創建哪些其他數字?

這是一個關於變相二進制數的問題。對於您的孩子來說，意識到或理解這一點並不重要，重要的是玩耍。任何數都可以寫成二進制，所以所有數都可以通過加倍加 1 來實現。例如，21 是 16 + 4 + 1。所以，21 = 2 x (2 x (2 x (2 x 1) + 0) + 1) + 0) + 1.

第 5 章 — 雙重或無

— 介紹 —

玩家通過秘密選擇 5 個大於 20 且不大於 120 的不同數字開始遊戲。看他們。使用號碼卡或其他一些設備，可以創建一個從 1 到 20 的隨機數。該數字反复翻倍，直到有人的號碼第一次被擊中或該號碼大於 120。第一個擊中所有五個號碼的玩家是贏家。

— 分析 —

問題是：要選擇的最佳五個數字是什麼？這裡有一些想法需要考慮。

<u>規則</u>：總是選擇一個 1 到 20 的 2 次冪的數字。

如果你選擇 23 或 46 這樣的數字，他們永遠不會被擊中，你肯定會輸。

<u>規則</u>：永遠不要選擇一個你可以選擇但沒有選擇的數字的兩倍。

如果你選擇 44，為什麼不選擇 22 呢？如果對方選擇 22，您將錯過一輪。

<u>進一步分析</u>：從 1 到 20 的數字同樣有可能被選中。但是，因為 9 導致 18，所以 18 作為起點的可能性是 11 的兩倍。如果將這些方法結合起來獲得不同的起點，起點的概率如下：

11 - 1/20（來自 11）

12 - 3/20（來自 3、6 和 12）

13 - 1/20（來自 13）

14 - 2/20（來自 7 和 14）

15 - 1/20（來自 15）

16 - 5/20（來自 1、2、4、8 和 16）

17 - 1/20（來自 17）

18 - 2 /20（來自 9 和 18）

19 - 1/20（來自 19）

20 - 3/20（來自 5、10 和 20）16、12 和 20 的

顯然，最好使用的數字是倍數。一個簡單的策略是使用五個數字：32、64、24、48 和 40。這些數字不會總是贏，但隨著時間的推移，它們應該對你很好。